Группа 13 ПК.

Учебная дисциплина: Математика

Тема урока: Повторение теории и решение задач по теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей»

Тема данного урока – «Повторение теории и решение задач по теме “Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей”». На этом занятии мы повторим теорию, вспомнив определение параллельных прямых и лемму о пересечении параллельными прямыми плоскости. Далее повторим определение параллельности прямой и плоскости и ее признак. Затем решим несколько задач по теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей».
Повторение теории, двугранный угол

Двугранный угол

Двухгранный угол - это фигура, образованная прямой l и двумя полуплоскостями с общей границей l.

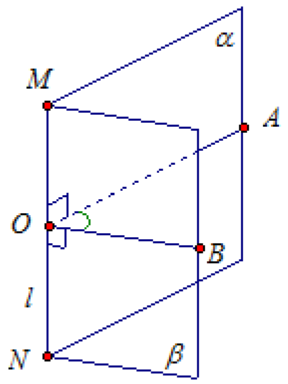

Рис. 1

Обозначение. Двугранный угол (рис. 1) часто записывают так: $\angle AMNB$.

MN - общая граница. Точка A лежит в одной полуплоскости α и точка B лежит в другой полуплоскости β.

Линейный угол двугранного угла

Линейный угол двугранного угла $AMNB$ строится следующим образом: выбирается точка O на общей границе l. Проводится перпендикуляр OA к прямой l в плоскости α. Проводится перпендикуляр OB к l в плоскости β. Полученный угол AOB является линейным углом двугранного угла, где $AO \perp l$, $BO \perp l$.

Измерение двугранного угла

Двугранный угол измеряется своим линейным углом.

Свойство 1.

Плоскость линейного угла и прямая *l* перпендикулярны. $l \perp AOB$

Доказательство

Так как прямая *l* перпендикулярна двум пересекающимся прямым *AO* и *BO*, то прямая *l* перпендикулярна плоскости *AOB*.
Задача 1

Точки *A* и *B* лежат на ребре данного двугранного угла, равного 120°.

Отрезки *AC* и *BD* проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла.

Найдите отрезок *CD*, если $AB = AC = BD = a$.

Дано: $\angle CABD = 120°$,

$AC \perp AB,\ AC \subset \alpha$,

$BD \perp AB,\ BD \subset \beta$,

$AB = AC = BD = a$.

Найти: *CD*.

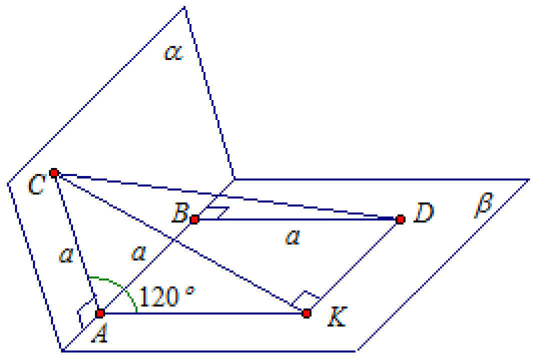

Рис. 2

Решение:

Здесь дан тупой двугранный угол, $\angle CABD = 120°$.

AB – ребро двугранного угла, точка *C* лежит в одной полуплоскости, точка *D* лежит в другой полуплоскости. В одной полуплоскости проведена прямая *AC*, перпендикулярная *AB*. В другой полуплоскости проведена прямая *BD*, перпендикулярная *AB*.

Проведем *AK* перпендикулярно *AB* и *DK* параллельно *AB* (рис. 2). Тогда угол *CAK* – линейный угол двугранного угла, а значит, ∠*CAK* = 120°.

Так как прямые *AK* и *BD*перпендикулярны одной и той же прямой *AB*, то прямые *AK* и *BD* – параллельны. В четырехугольнике *AKDB* противоположные стороны параллельны (*AK*||*BD, AB*|| *DK*), значит, *AKBD*– параллелограмм. Значит, *AK*=*BD* = *a*.

Рассмотрим треугольник *AKC*. Найдем CK^2 с помощью теоремы косинусов:

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2 \cdot AC \cdot AK \cdot \cos\angle CAK = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120° = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Прямая *AB* перпендикулярна плоскости линейного угла (по свойству 1), значит, и параллельная ей прямая *DK* перпендикулярна плоскости линейного угла. А значит, прямая *DK* перпендикулярна прямой *CK*, лежащей в плоскости линейного угла, то есть угол *CKD* прямой.

Из прямоугольного треугольника *CKD* по теореме Пифагора находим гипотенузу *CD*.

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

Ответ: 2*a*.
Повторение теории, перпендикулярность плоскостей

*Определение.*Плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Имеем плоскости α и β, которые образуют двугранный угол. *l* – ребро двугранного угла (рис. 3). Построим линейный угол данного двугранного угла. Возьмем точку *O* на ребре *l*. Проведем прямую *AO* перпендикулярно ребру *l* в плоскости α и прямую *BO* перпендикулярно ребру *l* в плоскости β. Тогда, ∠*BOA* – линейный угол двугранного угла. Если ∠*BOA* =90°, то плоскости α и β перпендикулярны.

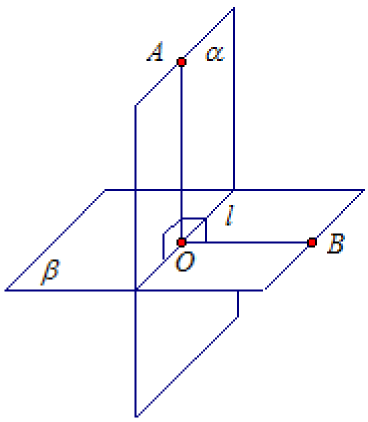

Рис. 3

Признак перпендикулярности плоскостей

Пусть, прямая *OA* перпендикулярна плоскости β и *OA* лежит в плоскости α. Тогда плоскости α и β перпендикулярны.

Следствие из признака

Если плоскости α и β пересекаются по прямой *l*, а плоскость γ перпендикулярна прямой *l*, то плоскость γ перпендикулярна плоскости α и плоскость γ перпендикулярна плоскости β (рис. 4).

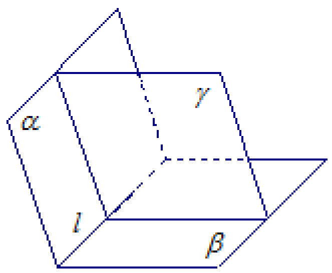

Рис. 4

Доказательство

Прямая *l* перпендикулярна плоскости γ по условию, но плоскость α проходит через прямую *l*, значит, плоскость γ перпендикулярна плоскости α. Плоскость β также проходит через прямую *l*, значит, плоскость γ перпендикулярна плоскости β. Следствие доказано.

Указанное следствие переформулируем для двугранного угла и для его линейного угла.

Свойство

Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру и граням своего двугранного угла.

Другими словами, если мы построили линейный угол двугранного угла, то его плоскость перпендикулярна всем элементам этого двугранного угла – и ребру, и граням.

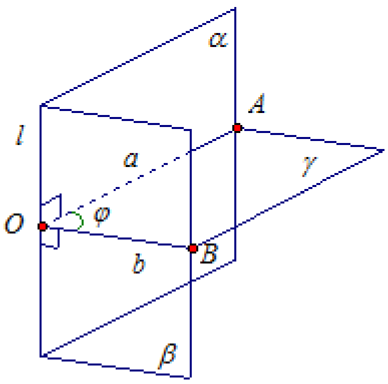

Рис. 5

Рассмотрим рисунок 5. Мы имеем плоскость α и плоскость β. Они пересекаются по прямой l. Из точки O проводим прямую AO перпендикулярно ребру l в плоскости α. Из точки O в плоскости β проводим вторую прямую BO перпендикулярно к ребру l. Получаем линейный угол двугранного угла – угол BOA. Обозначим плоскость BOA за γ.

Тогда, плоскость линейного угла γ перпендикулярна прямой l, так как прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым AO и BO из плоскости γ по построению. Также через перпендикуляр l к плоскости γ проходит плоскость α, значит, по признаку $\alpha \perp \gamma$. Аналогично, $\beta \perp \gamma$.

Задача 2

Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$ $DB = 5\sqrt{5}$.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр.

$\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90°$.

$AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

Найти: $\angle (ABCD)$

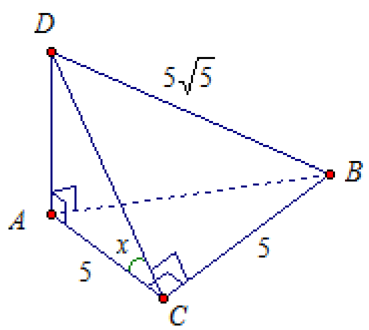

Рис. 6

Решение:

Прямая *DA* перпендикулярна пересекающимся прямым *AB* и *AC* из плоскости *ABC*. Значит, прямая *DA* перпендикулярна плоскости *ABC*.

Тогда *AC* - это проекция *DC* на плоскость *ABC*. Проекция *AC* перпендикулярна прямой *BC* из плоскости по условию, значит, и наклонная *DC* перпендикулярна прямой *BC* (по теореме о трех перпендиулярах). Получаем, что угол *ACD* – линейный угол искомого двугранного угла.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *DCB*. Найдем *DC* по теореме Пифагора.

$$DC = \sqrt{DB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 - 5^2} = 10$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ACD*. Выразим косинус угла *ACD*.

$\cos\angle ACD = \frac{AC}{DC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Тогда $\angle ACD = 60°$.

Ответ: $60°$.

Домашнее задание:

1.Повторить теорию и решение задач.

2.Решить задачи и записать в тетрадь.

1. Прямоугольник *ABCD* перегнули по диагонали *AC* так, что плоскости *ABC* и *ACD* оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками *B* и *D*, если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см.

2. Параллельные прямые а и с лежат в плоскости α. Через каждую из этих прямых проведена плоскость, перпендикулярная плоскости α. Каково взаимное расположение полученных плоскостей?

3. Сторона *BC* прямоугольника *ABCD* служит стороной треугольника *BCK*, причем точка *K* проектируется на прямую *CD*. Укажите линейный угол двугранного угла *BC*.

4. Найдите множество точек, принадлежащих одной грани двугранного угла и удаленных от плоскости другой грани на расстояние *a*.

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru