19.10.2021

Урок по теме: Перпендикуляр и наклонные

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме.

- Определение перпендикуляра, наклонной и проекции наклонной на плоскость;
- Доказательство теоремы о трех перпендикулярах;
- Определение угла между прямой и плоскостью.

Глоссарий по теме

Теорема о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Основная литература:

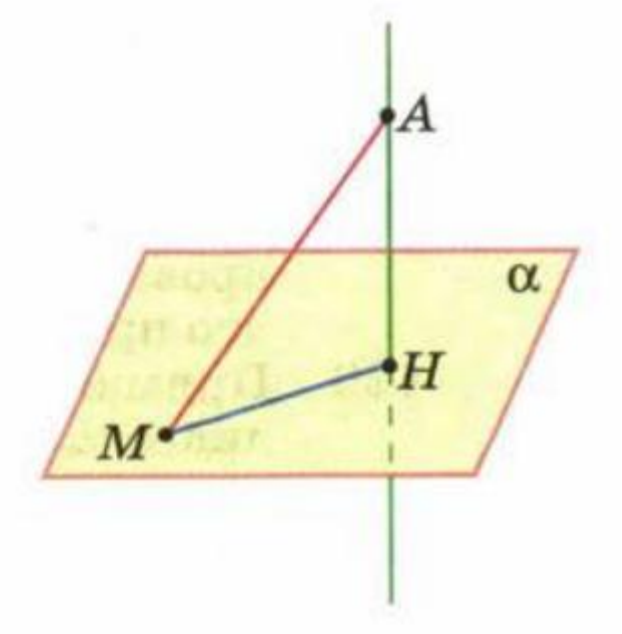
Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

Дополнительная литература:

Глазков Ю. А., Юдина И. И., Бутузов В. Ф. Рабочая тетрадь по геометрии для 10 класса. Базовый и профильный уровень. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости (рис. 1). Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок AH называется перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α, а точка H — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется наклонной, проведенной из точки A к плоскости α, а точка M – основанием наклонной. Отрезок HM называется проекцией наклонной на плоскость α.



(Рис. 1)

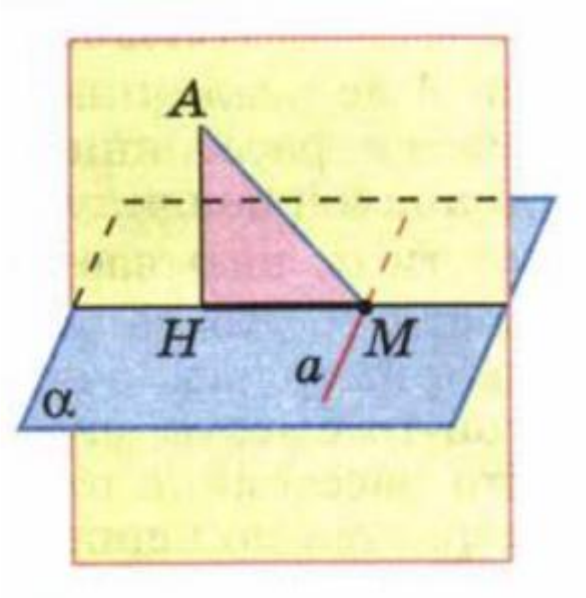
Рассмотрим прямоугольный треугольник *AMH*. Сторона *AH* — катет, а сторона *AM* — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется расстоянием от точки A до плоскости α.

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости. Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой b равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: *AH* — перпендикуляр к плоскости α, *AM* — наклонная, *a* — прямая, проведенная в плоскости α через точку *M* перпендикулярно к проекции наклонной *HM*. Докажем, что прямая *a* перпендикулярна наклонной *AM*.

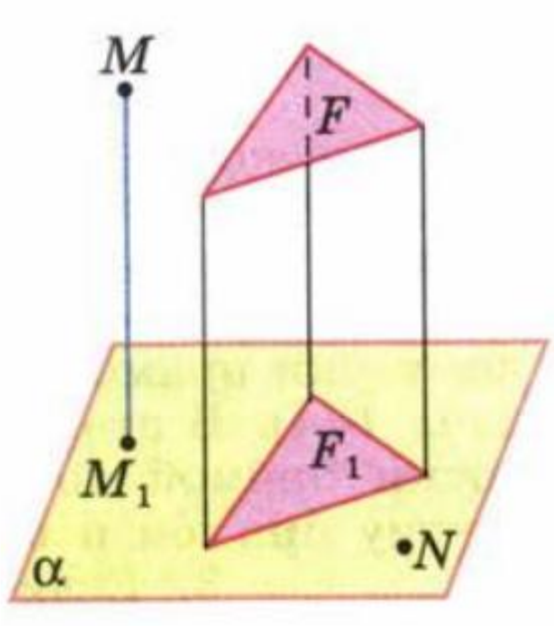
Рассмотрим плоскость *AMH*. Прямая *a* перпендикулярна к НМ по условию. Так как прямая *a*, лежит в плоскости α, а эта плоскость перпендикулярна отрезку *AH*, то прямая *a* перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая *a* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости *AMH*, в частности прямая *a* перпендикулярна отрезку *AM*. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами *AH*, *HM* и *AM*.

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой *F* какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

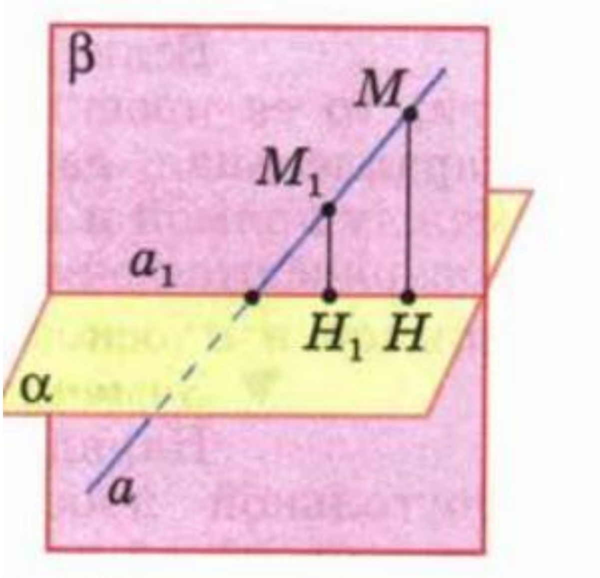
Данную плоскость обозначим буквой α. Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой *a*. Из какой-нибудь точки *M* прямой *a* проведем перпендикуляр *MH* к плоскости α и рассмотрим плоскость *β*, проходящую через прямую *a* и перпендикуляр *MH*. Плоскости α и *β* пересекаются по некоторой прямой a_1.

Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой *a* на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой *a* и проведем в плоскости *β* прямую M_1H_1, параллельную прямой *MH*.

Так как отрезок *MH* перпендикуляр к плоскости α и отрезок MH параллелен M_1H_1, то отрезок M_1H_1 тоже перпендикулярен плоскости α.

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой *a* лежит на прямой a_1.

Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой *a*. Следовательно, прямая a_1 — проекция прямой *a* на плоскость α. Что и требовалось доказать.



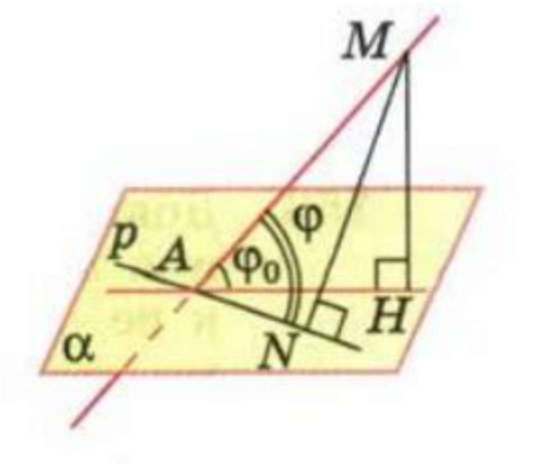
(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1. Докажем, что угол между φ_0 между данной прямой АМ и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку А.



(Рис. 5)

Обозначим буквой *H* основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки *M* к плоскости α.

Рассмотрим произвольную прямую *p* в плоскости α, проходящую через точку *A* и отличную от прямой *AH*.

Угол между прямыми *AM* и *p* обозначим через φ.

Докажем, что φ больше чем φ_0.

Из точки *M* проведем перпендикуляр *MN* к прямой *p*. Если точка *N* совпадает с точкой *A*, то φ равняется 90 градусам и поэтому φ больше чем φ *0*. Рассмотрим случай, когда точки *A* и *N* не совпадают. Отрезок *AM* — общая гипотенуза прямоугольных

треугольников *ANM* и *AHM*, поэтому
sinφ=MN/AM

$$\sin\varphi_0 = \frac{MH}{AM}$$

Так как наклонная *MN* больше, чем перпендикуляр *MH*, то синус угла φ больше, чем синус угла φ_0. Поэтому угол φ больше, чем угол φ_0. Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если *AM* = *a*, *HB* = *a*.

Решение. Искомый угол – MHA.

Рассмотрим треугольник *ABC*. Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как *HB* = a, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину 2*a*. Рассмотрим треугольник *AHB*. Он прямоугольный, т.к. *AH* медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны *AH*: $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$.

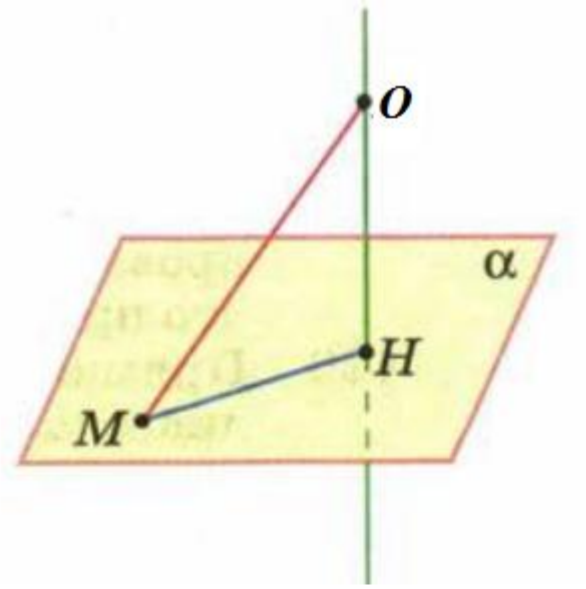
Далее рассмотрим треугольник *MHA*, он прямоугольный, т.к. *MA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Зная это мы можем выразить тангенс искомого угла: $tgMHA = \frac{MA}{HA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен 30 градусов.

Ответ: $\angle MHA = 30^\circ$.

Тестовый вопрос №8. Из точки *O* к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Решение. Нарисуем рисунок. *OH* – перпендикуляр, *OM* – наклонная, длина которой 17 см, *MH* – проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник *OHM* – прямоугольный, т.к. *OH* – перпендикуляр. Поэтому *OH* – искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора: $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 8$ сантиметров.



Ответ: 8 сантиметров.

Домашнее задание: составить конспект и отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru