Тема урока**: Решение иррациональных уравнений.**

<u>Продолжаем разбирать материал начатый на предыдущем уроке.</u>

Определение. *Иррациональным уравнением* называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или возведена в дробную степень.

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

Главный способ избавиться от корня и получить рациональное уравнение – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, которую имеет корень, содержащий неизвестное, и последующее «освобождение» от радикалов по формуле $\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^n = \varphi(x)$.

Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному уравнению.

При возведении уравнения в четную степень получают уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат.

Заметим, что потеря корней при возведении уравнения в четную степень невозможна.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение.

Пример. Решим уравнение: $\sqrt{5-4x} = 2x+5$.

Решение. Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $(\sqrt{5-4x})^2 = (2x+5)^2$, получим $5-4x = 4x^2+20x+25 \Leftrightarrow 4x^2+24x+20=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2+6x+5=0$, откуда следует, что $x=-5$ или $x=-1$.

Проверка. $x=-5$: $\sqrt{5-4\cdot(-5)} = 2\cdot(-5)+5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = -5$. Это неверное числовое равенство, следовательно, число (-5) не является корнем данного уравнения.

$x=-1$: $\sqrt{5-4\cdot(-1)} = 2\cdot(-1)+5 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$. Это верное числовое равенство, следовательно,, число (-1) является корнем данного уравнения.

Ответ. $x=-1$.

Пример. Решим уравнение: $\sqrt{3x^2-x-2} = x-1$.

Решение. После возведения в квадрат получаем уравнение: $3x^2 - x - 2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$ $2x^2 + x - 3 = 0$, откуда следует, что $x = 1$ или $x = -\frac{3}{2}$.

Проверка. $x = 1$: $\sqrt{3 \cdot 1^2 - 1 - 2} = 1 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{0} = 0$. Это верное числовое равенство, следовательно,, число 1 является корнем данного уравнения.

$x = -\frac{3}{2}$: $\sqrt{3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 2} = -\frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$. Это неверное числовое равенство, следовательно,, число $-\frac{3}{2}$ не является корнем данного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

Пример. Решим уравнение: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6.$

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}.$ Возведем обе части данного уравнения в квадрат, получим: $2x + 6 = \left(6 - \sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 12\sqrt{x-1} = 29 - x.$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат, имеем:

$144(x-1) = (29-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 202x + 985 = 0,$ откуда $x_1=5$; $x_2=197$.

Проверка показывает, что $x_2=197$ – посторонний корень, $x=5$ – корень уравнения.

Ответ. $x = 5.$

Пример. Решим уравнение: $\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4$.

Решение. Возведение обеих частей данного уравнения в четвертую степень не обещает ничего хорошего. Если же предположить, что $y = \sqrt[4]{47-2x}$, $z = \sqrt[4]{35+2x}$, то исходное уравнение примет вид: $y + z = 4$.

Поскольку введены две новые неизвестные, необходимо найти еще одно уравнение, связывающее *y* и *z*. Для этого возведем равенства $y = \sqrt[4]{47-2x}$, $z = \sqrt[4]{35+2x}$ в четвертую степень и заметим, что $y^4 + z^4 = 82$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} y+z=4, \\ y^4+z^4=82. \end{cases}$

Система имеет два действительных решения: $y_1=1$, $z_1=3$; $y_2=3$, $z_2=1$.

Решим две системы уравнений с одним неизвестным:

$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=3, \\ \sqrt[4]{35+2x}=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=1, \\ \sqrt[4]{35+2x}=3, \end{cases}$

Решением первой системы является $x_1=-17$, второй $x_2=23$.

Ответ. $x_1=-17$, $x_2=23$.

Домашнее задание:№147(стр.297)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru