Тема урока: Решение простейших тригонометрических неравенств.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- решение простейших тригонометрических неравенств с помощью тригонометрической окружности;
- решение тригонометрических неравенств, сводимых к квадратным;
- решение тригонометрических неравенств методом интервалов.

Глоссарий по теме

1. **Синусом угла** α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\sin\alpha$
2. **Косинусом угла** α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\cos\alpha$
3. **Тангенсом угла** α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$

Угол α может выражаться и в градусах и в радианах.

1. **Арккосинусом** числа $m\ (|m| \le 1)$ называется такое число α, что: $\cos\alpha = m$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Арккосинус числа m обозначают: $\arccos m$.
2. **Арксинусом** числа $m\ (|m| \le 1)$ называется такое число α, что: $\sin a = m$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Арксинус числа m обозначают: $\arcsin m$.
3. **Арктангенсом** числа m называется такое число α, что: $\operatorname{tg} a = m$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Арктангенс числа m обозначают: $\operatorname{arctg} m$.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства.

Начнем рассматривать с неравенства $sinx > a$.

Из рисунка 1 видно, что если a>1, то решений данное неравенство не имеет.

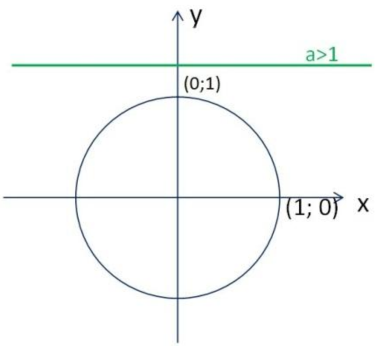

Рисунок 1 – Точки пересечения прямой y=a (a>1) с тригонометрической окружностью

Если a=1, то решений такое неравенство также не имеет (рис.2). Однако, если мы изменим знак на $\ge$ (получим неравенство $sinx \ge 1$, то решением его будет множество точек, в которых $sinx = 1$. Это числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

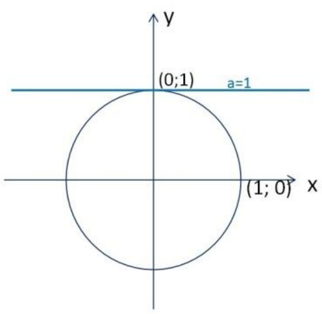

Рисунок 2 – Общие точки прямой y=1 с тригонометрической окружностью

Рассмотрим теперь значение $-1 < a < 1$ (рис.3).

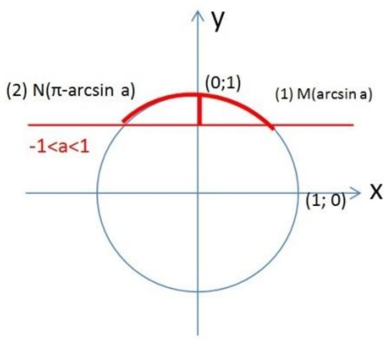

Рисунок 3 – Решение неравенства $sinx > a$

Видим, что множество решений данного неравенства представляет собой дугу, начало которой в точке (1) $M(arcsina)$, конец в точке (2) N(π – *arcsina*) . В зависимости от знака неравенство (строгое оно или нестрогое) промежуток представляет собой интервал или отрезок. Далее множество промежутков получается прибавлением $2\pi k, k \in Z$:

$$\pi - arcsina + 2\pi k < x < arcsina + 2\pi k, k \in Z$$

(для строгого неравенства) – множество интервалов;

$$\pi - arcsina + 2\pi k \leq x \leq arcsina + 2\pi k, k \in Z$$

(для нестрогого неравенства) – множество отрезков.

Если значение a= – 1,то получим следующую картинку (рис. 4):

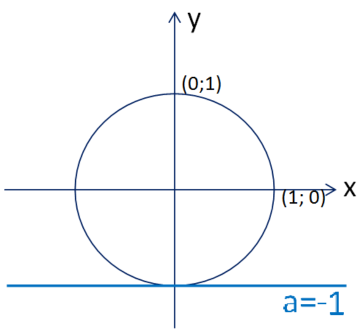

Рисунок 4 – Общие точки прямой y= – 1 с тригонометрической окружностью

Видно. что если неравенство нестрогое, то решением неравенства $sinx \geq -1$ является любое действительное число. Если неравенство строгое, то решением неравенства $sinx > -1$ является любое действительное число, кроме чисел вида $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Наконец, если $a < -1$, то решением неравенства $sinx > a$ является любое действительное число.

Решение неравенства $sinx < a$ рассмотрим более коротко.

Очевидно, что если $a > 1$, то решением неравенства $sinx < a$ является любое действительное число.

Если $a = 1$, то решением неравенства $sinx \leq 1$ является любое действительное число, а решением неравенства $sinx < 1$ является любое действительное число, за исключением чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Если $a = -1$, то решением неравенства $sinx \leq -1$ являются числа вида $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, а неравенство $sinx < -1$ решений не имеет. То же самое можно сказать о решении неравенств $sinx < a$ и $sinx \leq a$ в случае $a < -1$.

Случай $-1 < a < 1$ рассмотрим более подробно (рис. 5).

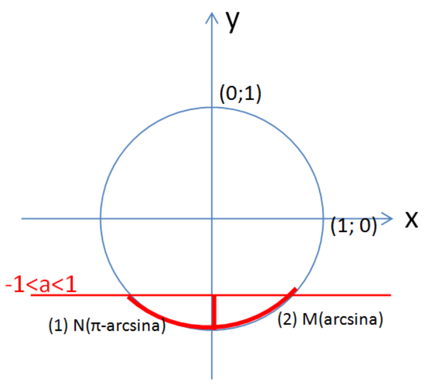

Рисунок 5 – Решение неравенства $sinx < a$

Решение неравенства $sinx \leq a$ для $-1 < a < 1$:

$\pi - arcsina + 2\pi k < x < arcsina + 2\pi(k+1), k \in Z$ (для строгого неравенства) - множество интервалов;

$\pi - arcsina + 2\pi k \leq x \leq arcsina + 2\pi(k+1), k \in Z$ (для нестрогого неравенства) - множество отрезков.

2. Теперь рассмотрим решение неравенств $cosx > a$ и $cosx < a$.

Рассуждая по аналогии с неравенствами относительно синуса, можем сделать вывод, что для $a > 1$ неравенство $cosx > a$ решений не имеет, а решением неравенства $cosx < a$ является любое действительное число.

Для $a < -1$ неравенство $cosx < a$ решений не имеет, а решением неравенства $cosx > a$ является любое действительное число.

Рассмотрим случай $-1 < a < 1$ более подробно.

Рассмотрим решение неравенства $cosx > a$ (рис. 6).

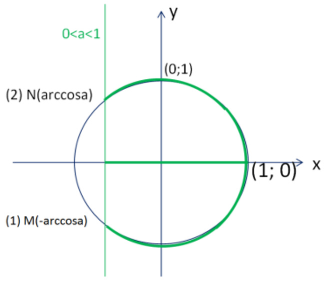

Рисунок 6 – Решение неравенства $\cos x > a$

Множество решений этого неравенства:

$-arccosa + 2\pi k < x < arccosa + 2\pi k, k \in Z$.

Теперь рассмотрим неравенство $cosx < a$ (рис. 7).

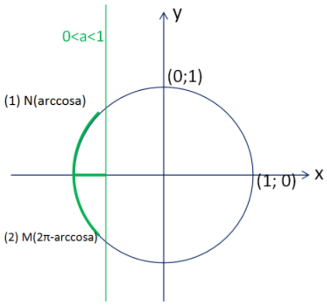

Рисунок 7 – Решение неравенства $\cos x < a$

Множество решений этого неравенства:

$arccosa + 2\pi k < x < -arccosa + 2\pi(k + 1), k \in Z$.

3. Теперь рассмотрим решение простейших неравенств $tgx < a$ и $tgx > a$.

Сначала рассмотрим неравенство $tgx \leq a$ (рис. 8).

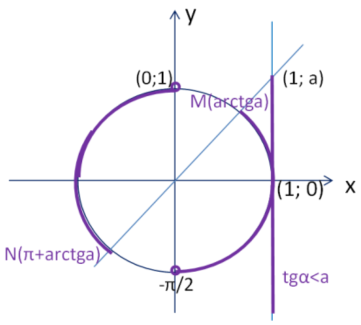

Рисунок 8 – Решение неравенства $tg\ x < a$

Множество решений этого неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \le arctga + \pi k, k \in Z$$.

Соответственно, множество решений неравенства $tgx \ge a$:

$$arctga + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Решите неравенство. Найдите коэффициенты

$3tg^2 2x \le 1$

Решение:

Выразим $tg2x$:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le tg2x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

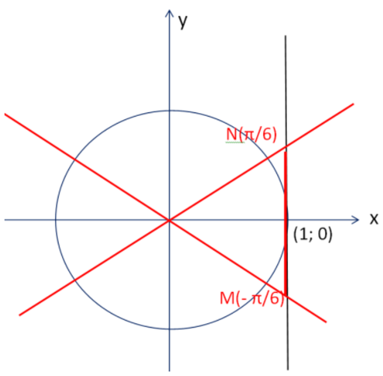

Рисунок 9 – решение неравенства $3tg^2 2x \le 1$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 2x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$-\frac{\pi}{12}+\pi k \le x \le \frac{\pi}{12}+\pi k, k \in Z$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k; \frac{\pi}{12}+\pi k\right]$

Домашнее задание: Записать теорию в тетрадь.

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru