Тема урока**: Методы решения тригонометрических уравнений.**

**Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:**

- Формирование системы знаний и умений решать тригонометрические уравнения различными методами;
- Применение метода разложения на множители при решении тригонометрических уравнений;
- Применение метода оценки при решении тригонометрических уравнений;

**Изучить теоретический материал самостоятельно и написать важную для вас информацию в тетрадь**

На этом уроке мы продолжаем заниматься решением тригонометрических уравнений. И здесь мы рассмотрим такие методы как разложение на множители, метод оценки, а также продолжим решать тригонометрические уравнения методом замены переменной. Кроме того, мы узнаем, как использовать домножение правой и левой частей уравнений для получения более простого уравнения, как использовать тригонометрические формулы для решения уравнений.

Сейчас выполните несколько заданий.

Задание 1.

Представьте в виде произведения:

$$sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+2sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-cos(3x+\pi)$$

Решение:

Используем формулы приведения, затем формулу преобразования суммы косинусов в произведение:

$$sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+2sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-cos(3x+\pi)=cosx+2cos2x+cos3x=$$

$$=(cosx+cos3x)+2cos2x=2cos2xcos(-x)+2cos2x=2cos2x(cosx+1)=$$

$$=2cos2x\cdot 2cos^2\frac{x}{2}.$$

(На последнем шаге мы фактически использовали формулу двойного аргумента:

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1)$.

Ответ: $2cos2x\cdot 2cos^2\frac{x}{2}$.

Задание 2.

Проверьте равенство:

$$\sin 54^0 \sin 18^0 = \frac{1}{4}$$

Решение:

При выполнении этого задания будем использовать прием домножения о деления левой части на одно и то же тригонометрическое выражение.

Но сначала заметим, что $sin54^0 = cos36^0$.

Теперь запишем левую часть: $cos36^0 \cdot sin18^0$.

теперь домножим и разделим это выражение на $2cos18^0$: $\frac{cos36^0 \cdot sin18^0 \cdot 2cos18^0}{2cos18^0}$.

Теперь воспользуемся формулой синуса двойного аргумента и получим:

$\frac{cos36^0 \cdot sin36^0}{2cos18^0}$. Теперь еще раз воспользуемся формулой двойного аргумента, предварительно домножив числитель и знаменатель на 2:

$$\frac{cos36^0 \cdot sin36^0}{2cos18^0} = \frac{2cos36^0 \cdot sin36^0}{4cos18^0} = \frac{sin72^0}{4cos18^0}$$

Учитывая, что $sin72^0 = cos18^0$, получаем: $\frac{cos18^0}{4cos18^0} = \frac{1}{4}$.

То есть исходное равенство верно.

**<u>Объяснение новой темы</u>**

***1. Рассмотрим метод разложения на множители***

Теоретической основой метода разложения на множители является теорема:

**Теорема**

Уравнение $f(x)g(x) = 0$ равносильно на своей области определения совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$.

Для того чтобы применить эту теоремы, нужно исходное уравнение привести к виду $f(x)g(x) = 0$, используя разные приемы.

Пример 1.

Решить уравнение: $2sinxcosx = sinx - cosx + \frac{1}{2}$

Решение:

Перенесем правую часть уравнения в левую и преобразуем:

$$(2sinxcosx - sinx) + cosx - \frac{1}{2} = 2sinx\left(cosx - \frac{1}{2}\right) + cosx - \frac{1}{2} = \left(cosx - \frac{1}{2}\right)(2sinx + 1)$$

$$\left(cosx - \frac{1}{2}\right)(2sinx + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx - \frac{1}{2} = 0 \\ 2sinx + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = \frac{1}{2} \\ sinx = -\frac{1}{2} \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right., k, n \in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right., k, n \in Z$.

В этом случае мы использовали метод группировки для разложения на множители тригонометрического выражения.

Часто для преобразования выражения в произведение нужно использовать тригонометрические формулы. Рассмотрим такой пример:

***2. Замена переменной***

Еще один метод решения тригонометрических уравнений - это метод разложения на множители. Мы уже знакомились с ним, когда решали уравнения, сводимые к квадратному или другому алгебраическому уравнению, когда решали однородные уравнения, а также знакомились с универсальной тригонометрической подстановкой. На этом уроке мы познакомимся еще с одной заменой, которая позволяет решать тригонометрические уравнения.

Рассмотрим уравнение вида:

$a(sinx \pm cosx) + bsinxcosx + c = 0, ab \neq 0$ или $a(sinx \pm cosx) + dsin2x + c = 0, ad \neq 0$.

Для его решения введем новую переменную $t = sinx \pm cosx$.

Тогда $t^2 = (sinx \pm cosx)^2 = sin^2x \pm 2sinxcosx + cos^2x = 1 \pm 2sinxcosx = 1 \pm sin2x$.

Выразим отсюда $sinxcosx = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1)$ (или $sin2x = \pm(t^2 - 1)$).

Пример2.

Решите уравнение $sin\,x - cos\,x = 4sin2x$

Решение:

Сделаем замену $sin\,x - cos\,x = t$. Тогда $sin2x = 1 - t^2$.

Вспомогательное уравнение имеет вид:

$4t^2 + t - 4 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{65}}{8} \\ t = \frac{-1-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right.$$.

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} sinx - cosx = \frac{-1+\sqrt{65}}{8} \\ sinx - cosx = \frac{-1-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right.$$.

Решим каждое из этих уравнений с помощью формулы введения вспомогательного угла:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1+\sqrt{65}}{8} \\ \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}} \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}} \end{array}\right.$$.

Так как $\left|\frac{-1\pm\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right| < 1$, то оба уравнения имеют решения:

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \\ x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \end{array}\right., k\in Z$$

, $$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \end{array}\right., k\in Z$$ .

Ответ: $$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k \end{array}\right., k\in Z$$ .

***3. Теперь рассмотрим метод оценки***

Часто этот метод применяют в том случае, когда уравнение включает в себя функции разного типа, например, тригонометрические и показательные, и обычные преобразования на приводят к результату. Но мы рассмотрим метод оценки при решении тригонометрических уравнений. Он основан на свойстве ограниченности тригонометрических выражений.

Рассмотрим пример.Пример 3.

Решить уравнение: $cos2xcos3x = 1$.

Мы знаем, что $|cos\alpha| \le 1$. С другой стороны, для того чтобы произведение двух различных чисел было равно 1, то они должны быть взаимно обратными, то есть если одно из них меньше 1,то другое больше 1. Но так как косинус больше 1 быть не может, то равенство может выполняться только в двух случаях:

$\begin{cases} cos2x = 1 \\ cos3x = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} cos2x = -1 \\ cos3x = -1 \end{cases}$.

$\begin{cases} 2x = 2\pi k \\ 3x = 2\pi n \end{cases}$, $k, n \in Z$ или $\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi k \\ 3x = \pi + 2\pi n \end{cases}$, $k, n \in Z$ .

$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$, $k, n \in Z$ или $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$, $k, n \in Z$ .

Вторая система ни при каких значениях k и n не имеет решений.

Первая система имеет решения при n=3m, k=2m, поэтому ее решения, а значит, и решение уравнения: $x = 2\pi m, m \in Z$

Ответ: $x = 2\pi m, m \in Z$

Домашнее задание:№144,145.(стр74-75)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru