Тема урока: Уравнение sin x = a.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

1) Понятие арксинус числа;

2) Тождества, связанные с арксинусом;

3) Решение тригонометрических уравнений;

Глоссарий по теме

Арксинусом числа m $(|m| \leq 1)$ называется такое число α, что: $\sin\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Арксинус числа m обозначают: $\arcsin m$.

Заметим, что такой промежуток для α берется потому, что синус на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ принимает все свои значения ровно по одному разу.

Из определения следует, что для $|m| \leq 1$ $\sin(\arcsin m) = m$

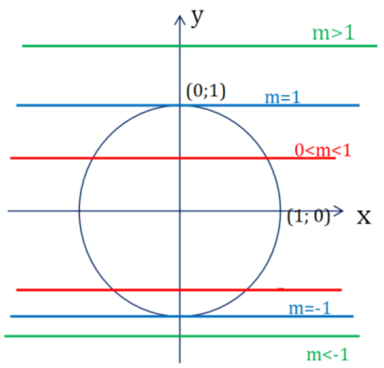
С другой стороны, если $\sin\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$.

Таким образом, получаем два простейших тождества для арксинуса.

1. $\sin(\arcsin m) = m$ для любого m: $|m| \leq 1$
2. $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ для любого α: $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Так как $\sin\alpha$ является абсциссой точки M(α) координатной окружности, то для решения уравнения $\sin\alpha = m$ нужно сначала найти на этой окружности точки, имеющие абсциссу m, то есть точки пересечения окружности с прямой x=m. Если $|m| > 1$, то таких точек нет, если $|m| = 1$, то такая точка одна, если $|m| < 1$, то таких точек две.



После отыскания этих точек нужно найти все такие числа α, которые соответствуют этим точкам. Множество таких чисел и будет решением уравнения $\sin a = m$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Рассмотрим пример на вычисление арксинуса.

Пример.

Вычислить $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

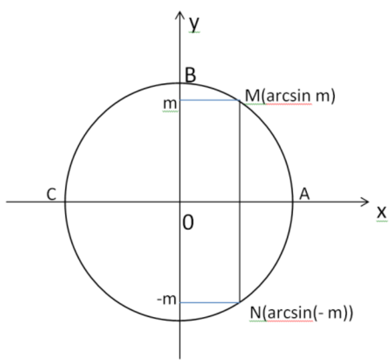
Решение:

Так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\text{arsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

На рисунке показано, как связаны друг с другом числа m и $\arcsin \text{m}$.

Из рисунка видно, что $\arcsin(-\text{m}) = -\arcsin \text{m}$.



Запишем теперь с помощью арксинуса решение уравнения $\sin\alpha = \text{m}$.

Одним из решений уравнения является число $\alpha = \arcsin m$. Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, то число $\pi - \arcsin m$ также является решением данного уравнения.

Точка $M(\arcsin m)$ соответствует всем числам вида $\arcsin m + 2\pi k, k \in Z$.

Точка $A(\pi - \arcsin m)$ соответствует всем числам вида $\pi - \arcsin m + 2\pi k, k \in Z$.

Таким образом, решением уравнения sinα=m являются все числа вида

$a = \left[\begin{array}{l} \arcsin m + 2\pi k \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$ (*)

Пример.

Решим уравнение $\sin\alpha = -0{,}6$

Решение:

Так как $\arcsin(-0{,}6) = -\arcsin 0{,}6$, то по формуле (*) получаем:

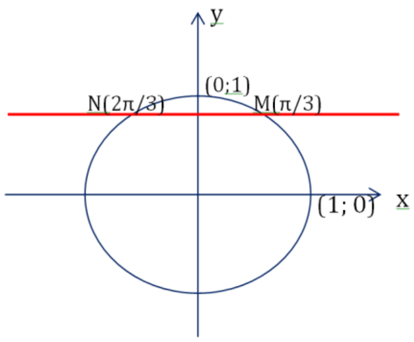
$a = \left[\begin{array}{l} -arcsin 0{,}6 + 2\pi k \\ \pi + arcsin 0{,}6 + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$.

Пример 1.

Рассмотрим решение уравнения $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прямая $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках:

M(π/3) и N(2π/3).



Точка M(π/3) соответствует всем числа вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Точка N(2π/3) соответствует всем числа вида $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Таким образом, решение уравнения $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать так:

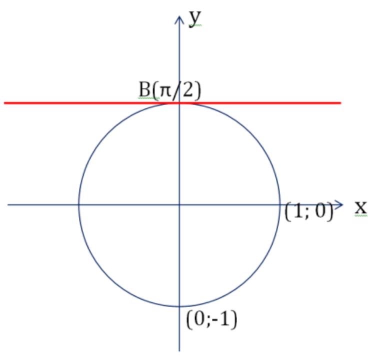
$$\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$$.

Ответ: $\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$.

Пример 2.

Рассмотрим решение уравнения $\sin\alpha = 1$.

Прямая y=1 имеет с тригонометрической окружностью одну общую точку: В($\frac{\pi}{2}$).



Этой точке соответствуют все числа вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Поэтому решение уравнения $\sin\alpha = 1$ имеет вид $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 3.

Рассмотрим решение уравнения $\sin\alpha = 0$.

Прямая y=0 имеет с тригонометрической окружностью две общие точки: С(0) и К(π).

Поэтому решение уравнения $\sin\alpha = 0$ можно записать так: $\alpha = \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\alpha = \pi k, k \in Z$.

Домашнее задание: Решить: №138,139.(стр74)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru