Тема урока: **Тригонометрические уравнения. Основные приёмы их решения.**

Приведем несколько рекомендаций по решению тригонометрических уравнений.

Чтобы решить тригонометрическое уравнение, надо попытаться:

1. привести все функции входящие в уравнение к «одинаковым углам»;
2. привести уравнение к «одинаковым функциям»;
3. разложить левую часть уравнения на множители и т.п.

Рассмотрим **основные методы решения тригонометрических уравнений.**

I. Приведение к простейшим тригонометрическим уравнениям

Схема решения

Шаг 1. Выразить тригонометрическую функцию через известные компоненты.

Шаг 2. Найти аргумент функции по формулам:

$\cos x = a$; $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\sin x = a$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{tg} x = a$; $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{ctg} x = a$; $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

Шаг 3. Найти неизвестную переменную.

Пример.

$2\cos(3x - \pi/4) = -\sqrt{2}$.

Решение.

1) $\cos(3x - \pi/4) = -\sqrt{2}/2$.

2) $3x - \pi/4 = \pm(\pi - \pi/4) + 2\pi n$, $n \in Z$;

$3x - \pi/4 = \pm 3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$.

3) $3x = \pm 3\pi/4 + \pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x = \pm 3\pi/12 + \pi/12 + 2\pi n/3$, $n \in Z$;

$x = \pm\pi/4 + \pi/12 + 2\pi n/3$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\pi/4 + \pi/12 + 2\pi n/3$, $n \in Z$.

II. Замена переменной

Схема решения

Шаг 1. Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.

Шаг 2. Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).

Шаг 3. Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.

Шаг 4. Сделать обратную замену.

Шаг 5. Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

Пример.

$2\cos^2 (x/2) - 5\sin (x/2) - 5 = 0$.

Решение.

1) $2(1 - \sin^2 (x/2)) - 5\sin (x/2) - 5 = 0$;

$2\sin^2 (x/2) + 5\sin (x/2) + 3 = 0$.
2) Пусть $\sin (x/2) = t$, где $|t| \le 1$.
3) $2t^2 + 5t + 3 = 0$;

$t = 1$ или $e = -3/2$, не удовлетворяет условию $|t| \le 1$.

4) $\sin (x/2) = 1$.
5) $x/2 = \pi/2 + 2\pi n$, $n Є Z$;

$x = \pi + 4\pi n$, $n Є Z$.

Ответ: ***$x = \pi + 4\pi n$, $n Є Z$.***
<u>III. Метод понижения порядка уравнения</u>
<u>Схема решения</u>
Шаг 1. Заменить данное уравнение линейным, используя для этого формулы понижения степени:
$\sin^2 x = 1/2 \cdot (1 – \cos 2x)$;
$\cos^2 x = 1/2 \cdot (1 + \cos 2x)$;
$tg^2 x = (1 – \cos 2x) / (1 + \cos 2x)$.
Шаг 2. Решить полученное уравнение с помощью методов I и II.
Пример.
$\cos 2x + \cos^2 x = 5/4$.
Решение.
1) $\cos 2x + 1/2 \cdot (1 + \cos 2x) = 5/4$.
2) $\cos 2x + 1/2 + 1/2 \cdot \cos 2x = 5/4$;

$3/2 \cdot \cos 2x = 3/4$;

$\cos 2x = 1/2$;

$2x = \pm\pi/3 + 2\pi n$, $n Є Z$;

$x = \pm\pi/6 + \pi n$, $n Є Z$.

Ответ: ***$x = \pm\pi/6 + \pi n$, $n Є Z$.***
<u>IV. Однородные уравнения</u>
<u>Схема решения</u>
Шаг 1. Привести данное уравнение к виду

а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б) $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).
Шаг 2. Разделить обе части уравнения на

а) $\cos x \ne 0$;

б) $\cos^2 x \ne 0$;

и получить уравнение относительно tg x:

а) $a\, tg\, x + b = 0$;

б) $a\, tg^2 x + b\, arctg\, x + c = 0$.

Шаг 3. Решить уравнение известными способами.
Пример.
$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0$.
Решение.
1) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$;
$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$;
$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0 / \cos^2 x \neq 0$.
2) $\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$.
3) Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$, тогда
$t^2 + 3t - 4 = 0$;

$t = 1$ или $t = -4$, значит

$\mathrm{tg}\, x = 1$ или $\mathrm{tg}\, x = -4$.

Из первого уравнения $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$; из второго уравнения $x = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi k$, $k \in Z$.
Ответ: ***$x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi k$, $k \in Z$.***
V. Метод преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул
Схема решения
Шаг 1. Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III, IV.
Шаг 2. Решить полученное уравнение известными методами.
Пример.
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
Решение.
1) $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$;

$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0$.

2) $\sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0$;

$\sin 2x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0$;

Из первого уравнения $2x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$; из второго уравнения $\cos x = -1/2$.

Имеем $x = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$; из второго уравнения $x = \pm(\pi - \pi/3) + 2\pi k$, $k \in Z$.

В итоге $x = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$; $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: ***$x = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$; $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k \in Z$.***

С решением тригонометрических уравнений связаны многие задачи стереометрии, физики, и др. Процесс решения таких задач как бы заключает в себе многие знания и умения, которые приобретаются при изучении элементов тригонометрии.

Домашнее задание: Решить;№152,153.(стр.298)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru