

Тема урока: Применение интегралов для решения геометрических и физических задач.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Знакомство с применением определенного интеграла в различных предметных областях
- 2) Знакомство с прикладными задачами, связанными с вычислением определенного интеграла в физике, экономике, геометрии.
- 3) Решение задач, с помощью определенных интегралов

$$s = \int_a^b v(t) dt \quad \text{путь, пройденный телом}$$

Прирост численности популяции $N(t)$ за промежуток времени от t_0 до T

$$\text{равен} \quad N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

Дневная выработка рабочего равна

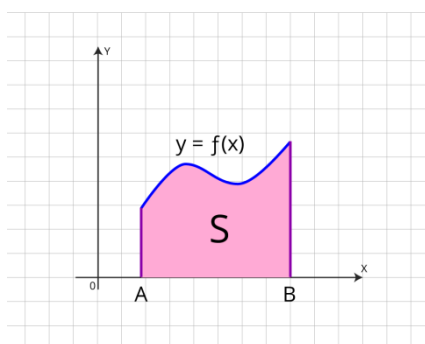
$$B = \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{Объем тела вращения} \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.

Отрезок $[a;b]$ называют **основанием** этой криволинейной трапеции



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

формула Ньютона – Лейбница

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

путь, пройденный телом

Прирост численности популяции $N(t)$ за промежуток времени от t_0 до T

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

равен

Дневная выработка рабочего равна

$$B = \int_a^b f(t) dt$$

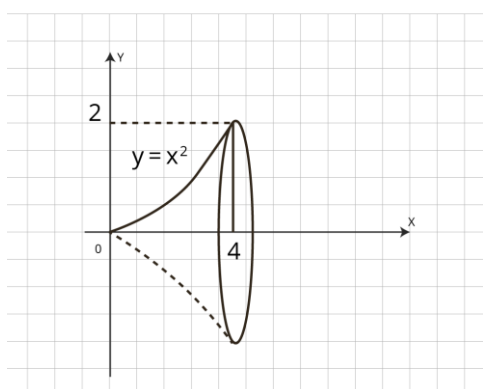
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Объем тела вращения

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1 Найти объем тела вращения вокруг оси Ox , ограниченной прямыми $y=0$, $x=0$ и $y=x^2$, $x=4$.

Решение: Построим тело вращения, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

и формулой нахождения объемов тел вращения.

Далее подставляем значения в формулу и рассчитываем объем тела вращения.

$$V = \int_0^4 x^2 * x^2 dx = \frac{\pi x^5}{5} = \frac{256\pi}{5} = 51,2\pi \text{ ед}^3$$

Ответ $51,2 \text{ ед}^3$

№2. Сила в 1 Н растягивает пружину на 3 см. Какую работу она при этом производит?

Решение.

Если F – сила, A – работа S – перемещение, то $F = A'(S)$.

Обратимся к физике.

По закону Гука сила пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности, x – величина растяжения или сжатия.

Используя данные задачи, найдите коэффициент k . Подставим данные в задаче величины

в уравнение, выражающее закон Гука. Получим: $k = \frac{1}{0,03}$.

Следовательно, сила, растягивающая нашу пружину, выразится следующим образом:

$$F = \frac{1}{0,03} x$$

Так как сила начинает действовать на пружину в состоянии покоя, то

работа $A = \int_0^{0,03} \frac{1}{0,03} x dx = \left(\frac{1}{0,03} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{0,03} = 0,015 \text{ Дж}$

Ответ: 0,015 Дж

№3. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $0,4 \text{ м} \times 0,7 \text{ м}$.

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx$$

Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x) = 0,7x$, $x \in [0; 0,4]$. Так как пределы интегрирования $a=0$ и $b=0,4$, то получим:

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 * 0,7 * x dx = 700 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

Ответ: 549 Н

№4 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2 \text{ (м/с)}$. Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение.

Физический смысл производной: если тело движется по закону $S = S(t)$, то скорость тела в момент времени t_0 равна значению производной функции $S(t)$ в этой точке, т. е. $v = S'(t_0)$. Тогда обратное утверждение: если скорость движения тела задана уравнением $v = v(t)$, то путь, пройденный телом от момента времени $t = a$ до момента времени $t = b$

равен $S = \int_a^b v(t) dt$. Подставим уравнение скорости в формулу и рассчитаем путь.

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2) dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150(\text{м}).$$

Ответ 150м

Домашнее задание: №372,373.(стр198-199)

Учебник: <http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html>

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru