Тема урока: Показательные уравнения. Системы показательных уравнений.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- простейшие показательные уравнения;
- решение показательных уравнений: замена переменной, разложение на множители;
- однородные показательные уравнения;
- графический метод решения показательных уравнений;
- системы показательных уравнений и их решение.

Глоссарий по теме

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ называются **простейшими показательными уравнениями**.

Теорема - основа метода замены переменной

Уравнение $f(g(x)) = a$ равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = t_1 \\ g(x) = t_2 \\ \quad \dots \\ g(x) = t_n \end{array}\right. \text{, где } t_i - \text{ корень уравнения } f(t) = a$$

.

Однородным показательным уравнением называется уравнение вида:

$$a_1 f^n + a_2 f^{n-1} g + a_3 f^{n-2} g^2 + \dots + a_{n+1} g^n = 0$$

Здесь f и g функции вида: $f(x) = b^{t(x)}$, $g(x) = c^{t(x)}$, $a_i -$ коэффициенты.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Рассмотрим показательные уравнения.

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит только в показатели степеней, при заданном основании.

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ называются **простейшими показательными уравнениями**.

В самом простом случае уравнение принимает вид: $a^x = b$.

Так как множество значений показательной функции $f(x) = a^x$ - множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет.

Теперь рассмотрим случай b>0.

Вспомним, что показательная функция при a>1 монотонно возрастает и принимает все положительные значения, каждое ровно один раз. В случае 0<a<1 показательная функция монотонно убывает и также принимает все положительные значения, каждое ровно один раз.

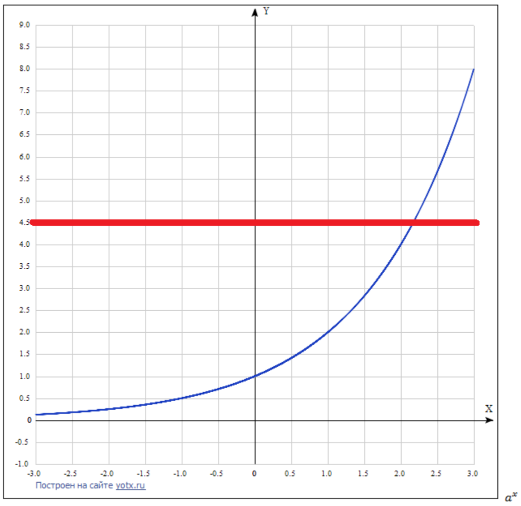

Рисунок 1 – иллюстрация решения простейшего показательного уравнения $a^x = b$, *a>1.*

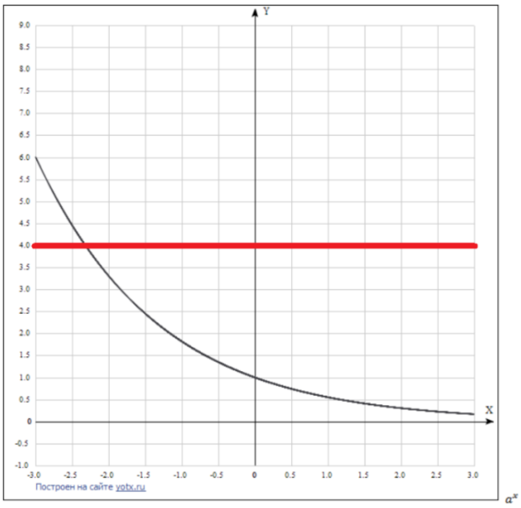

Рисунок 2 – иллюстрация решения простейшего показательного уравнения $a^x = b$, *0<a<1.*

Для того чтобы решить простейшее показательное уравнение $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$, нужно число *b* представить в виде степени числа *a*.

Рассмотрим пример: $13^x = \sqrt[5]{169}$.

Представим $\sqrt[5]{169}$ в виде степени числа 13: $\sqrt[5]{169} = 13^{2/5}$.

Теперь перепишем данное уравнение в виде: $13^x = 13^{2/5}$, поэтому *x*=2/5.

Ответ: *x*=2/5.

2. Теперь перейдем к решению более сложных показательных уравнений.

2.1. Рассмотрим уравнение вида:

$k_1 \cdot a^{f(x)+t_1} + k_2 \cdot a^{f(x)+t_2} + \dots + k_n \cdot a^{f(x)+t_n} = b$.

То есть мы видим, что левая часть этого уравнения представляет собой сумму, слагаемые которого отличаются коэффициентами (k_i) и показатели степеней с одинаковыми основаниям отличаются слагаемыми (t_i).

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+t_m}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем):

$a^{f(x)+t_m}(k_1 \cdot a^{t_1-t_m} + \dots + k_n \cdot a^{t_n-t_m}) = b$

Мы видим, что выражение в скобках представляет собой число.

Поэтому выразим $a^{f(x)+t_m} = \dfrac{b}{k_1 \cdot a^{t_1-t_m} + \dots + k_n \cdot a^{t_n-t_m}}$ и решим простейшее показательное уравнение.

Рассмотрим пример:

$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$.

Решение:

Преобразуем левую часть и вынесем за скобку 6^{x-1}:

$6^{x-1}(6^2 + 35) = 71$

$6^{x-1} \cdot 71 = 71$

$6^{x-1} = 1$

$6^{x-1} = 6^0$

x-1=0

x=1

Ответ: *x=1.*

2.2. Рассмотрим еще одно уравнение, которое решается с помощью вынесения за скобку общего множителя.

$4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

Решение:

Преобразуем уравнение: перенесем степени с одинаковыми основаниями в одну часть:

$4^x + 4^{x-0,5} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$,

Вынесем за скобку множители с одинаковыми показателями:

$4^{x-0,5}(4^{0,5}+1) = 3^{x-0,5}(3+1)$, $3 \cdot 4^{x-0,5} = 4 \cdot 3^{x-0,5}$.

Теперь преобразуем полученное уравнение к виду: $a^{f(x)} = a^k$. Для этого разделим обе части уравнения на $3^{x-0,5}$ и на 3:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-0,5} = \frac{4}{3}.$$

x-0,5=1

x=1,5.

Ответ: *x=1,5.*

2.3. Еще один вид показательных уравнений – уравнения, сводящиеся к квадратным:

$k_1 \cdot a^{2f(x)+t_1} + k_2 \cdot a^{f(x)+t_2} + k_3 = 0$.

В этом случае вводят новую переменную: $p = a^{f(x)}$. Получим вспомогательное уравнение: $b_1 p^2 + b_2 p + k_3 = 0$.

После решения этого уравнения получим простейшие показательные уравнения.

Рассмотрим пример:

$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную: $t = 4^x$.

Запишем вспомогательное уравнение: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

$\left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$. Вернемся к переменной x:

$\left\{\begin{array}{l} 4^x = 1 \\ 4^x = 4 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

2.4. Еще один вид уравнений, который сведется к решению квадратного или уравнения третей степени, это однородное уравнение.

Однородным показательным уравнением называется уравнение вида:

$a_1 f^n + a_2 f^{n-1} g + a_3 f^{n-2} g^2 + \cdots + a_{n+1} g^n = 0$

Здесь f и g функции вида: $f(x) = b^{t(x)}$, $g(x) = c^{t(x)}$, $a_i -$ коэффициенты.

Однородные показательные уравнения решаются делением на g^n или на f^n и последующей заменой: $t = \frac{f}{g}$.

Рассмотрим пример:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

Решение:

Заметим, что $4^x = 2^{2x}$, $9^x = 3^{2x}$, $6^x = 2^x \cdot 3^x$. То есть уравнение можно записать в виде:

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x$.

Разделим уравнение на 3^{2x}, получим уравнение: $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Теперь введем новую переменную: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ и получим вспомогательное уравнение:

$3t^2 - 5t + 2 = 0$, решим его:

$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ответ: $[x = 0\ x = 1$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Решите уравнение: $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0$

Решение: Запишем уравнение в виде:

$\left(3^{x^2}\right)^2 - 2 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{x+6} + (3^{x+6})^2 = 0$

Таким образом, уравнение является однородным относительно функций: 3^{x^2} и 3^{x+6}.

Разделим уравнение на $(3^{x+6})^2$ и получим:

$\left(3^{x^2-x-6}\right)^2 - 2 \cdot 3^{x^2-x-6} + 1 = 0$.

Введем новую переменную: $t = 3^{x^2-x-6}$.

Вспомогательное уравнение:

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

$t = 1$

Вернемся к исходной переменной:

$3^{x^2-x-6} = 1$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Пример 2.

Решите систему: $\left\{\begin{array}{l} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{array}\right.$

Решение: Введем новые переменные: $\left\{\begin{array}{l} a = 64^x \\ b = 64^y \end{array}\right.$.

Рассмотрим вспомогательную систему:

$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 12 \\ ab = 4\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Возведем второе уравнение в квадрат:

$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 12 \\ a^2 b^2 = 32 \end{array}\right.$. Решим полученную систему относительно a^2 и b^2 .

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Так как $\begin{cases} a = 64^x \\ b = 64^y \end{cases}$, то есть положительные, то

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Вернемся к исходным переменным.

$$\begin{cases} 64^x = 2 \\ 64^y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 64^x = 2\sqrt{2} \\ 64^y = 2 \end{cases}.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x = 1/6 \\ y = 1/4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 1/6 \end{cases}.$$

Ответ: (1/6; 1/4); (1/4; 1/6)

Домашнее задание:

1.Изучить теоретический материал и выписать важную для вас информацию.

2 Решить в тетради №164.(стр.299)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru