Тема урока: Тождества с арккосинусом, арксинусом, арктангенсом и арккотангенсом.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- Тождества, связывающие обратные тригонометрические функции и тождества, связывающие тригонометрические и обратные тригонометрические функции
- Применение тождеств на несложных примерах и для вычисления выражений, включающих *арккосинус, арксинус, арктангенс и арккотангенс*
- Применение тождеств с *арккосинусом, арксинусом, арктангенсом и арккотангенсом* для преобразования выражений.

Глоссарий по теме

Арккосинусом числа m $(|m| \leq 1)$ называется такое число α, что: $\cos a = m$ и $0 < \alpha < \pi$. Арккосинус числа m обозначают: $\arccos m$.

Арксинусом числа m $(|m| \leq 1)$ называется такое число α, что: $\sin a = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Арксинус числа m обозначают: $\arcsin m$.

Арктангенсом числа m называется такое число α, что: $\operatorname{tg} a = m$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Арктангенс числа m обозначают: $\operatorname{arctg} m$

Арккотангенсом числа n называется такое число α, что: $\operatorname{ctg} a = n$ и $0 < \alpha < \pi$.

Арккотангенс числа n обозначают: $\operatorname{arcctg} n$.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Повторим понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса с самыми простыми тождествами, которые связывают их с тригонометрическими функциями:

$\cos(\arccos m) = \mathrm{m}$ и $\sin(\arcsin m) = \mathrm{m}$ для любого значения m: $|\mathrm{m}| \leq 1$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \mathrm{m}) = \mathrm{m}$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \mathrm{m}) = \mathrm{m}$ для любого значения m;

1. $\operatorname{arcos}(\cos\alpha) = \alpha$ для любого α: $0 \leq \alpha \leq \pi$
2. $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ для любого α: $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
3. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$ для любого α: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
4. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ для любого α: $0 < \alpha < \pi$

На этом уроке мы рассмотрим несколько тождеств, которые позволят нам вычислять значения выражений и преобразовывать достаточно сложные выражения с обратными тригонометрическими функциями.

Задание.

Попробуйте вычислить значение выражения:

$\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6})$

Решение:

В этом случае мы не можем воспользоваться тождеством, так как $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Но в этом случае мы имеем табличные значения:

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Ответ: $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

Задание

Вычислим значение выражения

$\cos(\mathrm{arctg}1)$

Решение:

В этом случае мы также имеем табличные значения:

$arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

$cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\cos(\mathrm{arctg}1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Рассмотрим сначала задачи, связанные с вычислением табличных значений обратных тригонометрических функций.

Пример 1.

Найдите значение: $\arcsin(-1/2) - arctg\sqrt{3}$.

Решение:

При решении данной задачи будем пользоваться табличными значениями аркфункций тождеством:

$\arcsin(-\mathrm{n}) = -\arcsin \mathrm{n}$:

$\arcsin(-1/2) - arctg\sqrt{3} = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.

Вычислить: $\arcsin\left(\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

Решение:

На первый взгляд, использование тождества приводит к получению ответа: $\frac{11\pi}{6}$. Но заметим, что аргумент синуса не удовлетворяет промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому ответ является неверным. Таким образом, нужно найти такое значение a, что: $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Таким значением является $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Значит, ответом является число $-\frac{\pi}{6}$.

2 вариант. Найдем численное значение $\sin\frac{11\pi}{6}$. Оно равно $-\frac{1}{2}$. Теперь найдем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$. Оно равно $-\frac{\pi}{6}$.

Заметим, что второй вариант решения возможен в том случае, когда мы имеем дело с табличными значениями тригонометрических функций.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}$.

Тождества, связывающие тригонометрические и обратные тригонометрические функции
$\sin(\arccos\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$ и $\cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$, если $\lvert\alpha\rvert \le 1$ $tg(arcctg\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ и $ctg(arctg\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ $tg(\arcsin\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ и $ctg(\arcsin\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$, если $\lvert\alpha\rvert \le 1$ $tg(\arccos\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$ и $ctg(\arccos\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, если $\lvert\alpha\rvert \le 1$

$\sin(arctg\alpha) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ и $\cos(arcctg\alpha) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $\cos(arctg\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ и $\sin(arcctg\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

1. Упростить выражение: $A = x^{-1}(1-x^2)^{-0,5} \cdot \sin(2\arcsin x)$, где $-1 < x < 0$

Решение:

При выполнении преобразования данного выражения воспользуемся формулой синуса двойного аргумента, а также тождествами, позволяющими выразить $\sin(\arcsin x)$ и $\cos(\arcsin x)$. В результате получим:

$$A = \frac{2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Упростите выражение: $\cos(\arccos x + \arccos y)$.

Решение:

Воспользуемся формулой преобразования косинуса суммы аргументов, а затем тождествами:

$\cos(\arccos x)\cdot\cos(\arccos y) - \sin(\arccos x)\cdot\sin(\arccos y) =$ Ответ: $xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$.
$= xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$

Домашнее задание:

1.Изучить самостоятельно материал и написать важную информацию в тетради.

2. Решить №121,122,123.(стр67-68)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru