Тема урока: Решение простейших тригонометрических уравнений.

Вопросы по теме:

- Формирование системы представлений о способе решения тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным, дробно-рациональным, алгебраическим степени выше второй методом замены переменной;
- Формирование умений решать методом замены переменной тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным, дробно-рациональным, алгебраическим степени выше второй;
- метод замены переменной в тригонометрических уравнениях.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

На предыдущих уроках мы научились решать простейшие тригонометрические уравнения, а именно, уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$. Решение таких уравнений необходимо для того чтобы успешно решать более сложные уравнения. Кроме того, мы уже узнали, как решаются и некоторые более сложные тригонометрические уравнения. На этом уроке мы продолжим изучение тригонометрических уравнений. Мы будем решать уравнения, которые могут быть решены методом замены переменной.

1. В основе метода замены переменной лежит следующая теорема.

Теорема

Уравнение $f(g(x) = a$ равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) = t_1 \\ g(x) = t_2 \\ \quad \ldots \\ g(x) = t_n \end{array}\right. \text{, где } t_i - \text{корень уравнения } f(t) = a$$

Для того чтобы можно было применить эту теорему, уравнение вида $F(x) = a$ нужно преобразовать к виду $f(g(x)) = a$. Однако, это не всегда возможно.

Вообще, если тригонометрическое уравнение включает в себя синус и косинус одного и того же аргумента, и одна из них содержится в уравнении в четной степени, а другая в нечетной, то в качестве новой переменной целесообразно рассматривать ту переменную, которая в уравнение входит в нечетной степени.

Например, в уравнении $4sin^3(3x) - 3cos^2(3x) + 6\,sin\,sin\,(3x) - 4 = 0$ $\sin(3x)$ входит в первой и в третьей степени, а $\cos(3x)$ - во второй. Поэтому в качестве новой переменной будем рассматривать $t = \sin(3x)$.

Тогда $cos^2 3x = 1 - sin^2 3x$ и уравнение примет вид:

$4sin^3(3x) - 3(1 - sin^2(3x)) + 6\,sin\,sin\,(3x) - 10 = 0$ или

$4sin^3(3x) + 3sin^2(3x) + 6\,sin\,sin\,(3x) - 13 = 0$.

Оно после замены сводится к алгебраическому третьей степени

$4t^3 + 3t^2 + 6t - 13 = 0$

Оно имеет единственный корень t=1.

Поэтому $sin\, sin\,(3x) = 1$.

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$

2. Теперь рассмотрим более сложные уравнения, которые решаются с помощью замены переменной.

Пример 5.

Решите уравнение:

$\frac{1}{sinx} = 2tgx + 1$

Решение:

1 способ.

Так как $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ и $cosx = \pm\sqrt{1 - sin^2x}$, то можем записать исходное уравнение таким образом: $\frac{1}{sinx} = \frac{2sinxx}{\pm\sqrt{1 - sin^2x}} + 1$. Теперь мы получили уравнение, которое включает в себя только одну тригонометрическую функцию $\sin x$. Но получающееся после замены $t = sinx$ уравнение оказывается достаточно сложным, иррациональным. Поэтому рассмотрим другой, более простой способ решения этого уравнения.

2 способ

Возведем обе части равенства в квадрат. Для соблюдения равносильности будем рассматривать только те значения переменной x, при которой $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 \geq 0 \end{cases}$ (*).

$\left(\frac{1}{sinx}\right)^2 = (2tgx + 1)^2$. Раскроем скобки в правой части уравнения и получим:

$\frac{1}{sin^2x} = 4tg^2x + 4tgx + 1$

Так как $\frac{1}{sin^2x} = tg^2x + 1$, то получаем:

$tg^2x + 1 = 4tg^2x + 4tgx + 1$ или

$3tg^2x + 4tgx = 0$.

Решая это уравнение, мы можем ввести новую переменную $\operatorname{tg} x = t$:

$3t^2 + 4t = 0$

$t(3t+4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = -\frac{3}{4} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = -arctg\frac{3}{4} + \pi k \end{array}\right., k \in Z.$$

С учетом (*) получаем: $x = \pi - arctg\frac{3}{4} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \pi - arctg\frac{3}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 6

$$\frac{1}{1 + sin^2x} + \frac{1}{1 + cos^2x} = \frac{48}{35}$$

Решение:

Пусть $t = sin^2x$, $cos^2x = 1 - sin^2x$,

тогда вспомогательное уравнение: $\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2-t} = \frac{48}{35}$, или $105 = 48(2 + t - t^2)$.

$35 = 32 + 16t - 16t^2$, или $16t^2 - 16t + 3 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} sin^2x = \frac{1}{4} \\ sin^2x = \frac{3}{4} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} sinx = \pm\frac{1}{2} \\ sinx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \end{array}\right., k \in Z.$$

Ответ: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases}, k \in Z$.

Решение тригонометрического уравнения методом замены переменной.

Задание 6.

Решите уравнение:

$2cos^3x + 3cos^2x - 4cosx - 1 = 0$

Решение:

Введем новую переменную $t = cosx$.

Вспомогательное уравнение: $2t^3 + 3t^2 - 4t - 1 = 0$.

Один из корней получившегося уравнения t=1.

Получаем: $\begin{cases} t = 1 \\ 2t^2 + 5t + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$. Так как $|cosx| \leq 1$, то остается только два значения: $\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{\sqrt{17} - 5}{4} \end{cases}$, то есть $[cosx = 1 \; cosx = \frac{\sqrt{17} - 5}{4}$.

Получаем ответ:

$$\begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \pm arccos\left(\frac{\sqrt{17} - 5}{4}\right) + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \pm arccos\left(\frac{\sqrt{17} - 5}{4}\right) + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$

Домашнее задание:№141,142,143.

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru