Тема урока. **Преобразование тригонометрических выражений.**

Изучить самостоятельно теоретический материал и выписать нужную для вас информацию.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

- Преобразование тригонометрических выражений – это их упрощение, которое выполняется с помощью тригонометрических формул.

Вот некоторые правила, которые помогут нам преобразовывать тригонометрические выражения.

1. Если в тригонометрических выражениях разные меры угла, то их следует привести к единой, применяя правила:

1) Угол, равный α радиан, заменяем по формуле: $\boldsymbol{\alpha}$ **рад** $= (\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\alpha})^{\circ}$

Например: $\frac{\pi}{3}$ рад $= (\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \frac{\pi}{3})^{\circ} = 60^{\circ}$.

2) Угол, равный α градусов, заменяем по формуле: $\boldsymbol{\alpha}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}^{\circ}}\boldsymbol{\alpha}$ **рад**

Например: $40^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 40^{\circ} = \frac{2\pi}{9}$ рад.

1. Если синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы содержат разные аргументы, (углы),стараемся привести к одному аргументу (углу).

Например, с помощью формул двойного аргумента(угла) $\cos 2\alpha$ заменяем на $\cos\alpha$ по формуле $\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$.

1. Если в тригонометрическом выражении необходимо поменять синус на косинус, тангенс на котангенс, то применяем формулы приведения.

Например: $\sin 85^{\circ} = \cos 5^{\circ}$, так как $85^{\circ} = 90^{\circ} - 5^{\circ}$, синус меняется на косинус.

$\text{tg}295° = -\text{ctg}25°$, так как $295° = 270° + 25°$, тангенс меняется на котангенс, угол в четвёртой четверти, здесь тангенс отрицательный.

1. Если тригонометрические выражения содержат большое количество тригонометрических функций, то необходимо привести к минимальному количеству видов функций. Для этого используем формулы приведения, основное тригонометрическое тождество или другие формулы.

Например:

вычислить $\sin 105° \cos 15° + \sin 15° \sin 165° + \text{tg}225°$.

Заметим, что $\sin 105° = -\cos 15°$, $\sin 165° = \sin 15°$, $\text{tg}225° = \text{ctg}45° = 1$.

Тогда данное выражение примет вид:

$$-\cos 15° \cos 15° + \sin 15° \sin 15° + 1 = -\cos^2 15° + \sin^2 15° + 1 = -(\cos^2 15° - \sin^2 15°) + 1$$

;

в скобках формула косинуса двойного угла, т.е. $\cos(2 \cdot 15°) = \cos 30°$, значит

$$-\cos 30° + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Если в тригонометрическом выражении нужно понизить степень входящих в него компонентов, применяем формулу понижения степени или формулу половинного аргумента. Только помните: степень понижается, аргумент удваивается.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2},\quad \text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha + 1},\quad \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

Данная группа формул позволяет перейти от любого тригонометрического выражения к рациональному.

Например: упростите выражение $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha$.

Применяем формулу понижения степени для косинуса и получаем:

$\frac{\cos\alpha + 1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha + 1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Чтобы определить рациональность значения тригонометрического выражения, мы должны знать, что из всех углов, содержащих рациональное число, лишь углы вида πk; $\frac{\pi}{3} + \pi k$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k целое число, имеют рациональный косинус.

Например, $\cos\frac{7\pi}{3}$ число рациональное, так как $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Углы вида πk; $\frac{\pi}{6} + \pi k$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k целое число, имеют рациональный синус.

Углы вида πk; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, где k целое число, имеют рациональный тангенс.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля:

Рассмотрим примеры преобразований тригонометрических выражений.

Пример 1.Вычислите: $\frac{24}{\sin^2 39° + \sin^2 129°}$.

Заметим, что в знаменателе данной дроби у синусов разные углы $39°$ и $129°$. Используем формулу приведения: $\sin^2 129° = \sin^2(90° + 39°) = \cos^2 39°$ и тогда наше выражение примет вид: $\frac{24}{\sin^2 39° + \cos^2 39°}$, в знаменателе тригонометрическое тождество, равное 1. Нам осталось 24 разделить на 1, получаем 24.

Пример 2. Найдите $\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{3\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\text{tg}\alpha = 3$.

Так как $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то разделив числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$. Получаем:

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$, сократим и заменим $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ на $\text{tg}\alpha$.

$$\frac{\text{tg}\alpha - 2}{3\text{tg}\alpha - 1}$$, по условию $\text{tg}\alpha$=3, подставим это число в наше выражение: $\frac{3-2}{3\cdot 3-1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Выполнить домашнее задание в тетрадь.

Домашнее задание

1. Упростите: $\frac{4\sin 25^0 \sin 65^0}{\cos 40^0}$ (ответ: 2.)
2. Вычислите: $\frac{\sin 92^0 - \sin 2^0}{9\sqrt{2}\cos 47^0 + \sqrt{2}\sin 43^0}$ (ответ: 1/10)
3. Упростите: $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$ (ответ: –2.)
4. Упростите: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ (ответ: 2)

Выполненные задания отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru