Тема урока. Формулы половинного аргумента.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

1) Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента;

2) Преобразовывать тригонометрические выражений на основе использования формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента;

3) Решение уравнения с использованием формулы синуса, косинуса половинного аргумента.

Изучить теоретический материал самостоятельно и записать конспект.

Сегодня мы узнаем формулы, позволяющие нам по известным значениям $\sin\alpha;\ \cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ находить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Их называют формулы половинного аргумента.

Повторим формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

А если учесть, что $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то получим ещё две формулы, которые нам сегодня понадобятся:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Пример. а) Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}2$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot 0{,}2^2 = 0{,}92.$

б) Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}9$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(-0{,}9)^2 - 1 = 0{,}62$.

- Запишем формулу косинуса двойного аргумента в виде $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и заменим x на $\frac{\alpha}{2}$. Тогда получим: $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, учтём, что

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, получаем

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

$\boldsymbol{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$ **(1)** формула **синуса половинного аргумента.**

Запишем формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$ в виде

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + 1$

$\boldsymbol{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}}$ **(2)** формула **косинуса половинного угла.**

По формулам (1) и (2) можно найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известны значения $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ и положение угла α, т.е. в какой координатной четверти он находится, чтобы определить знак выражения $\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Эти формулы ещё имеют название «формулы понижения степени», так как в левой части находится вторая степень синуса и косинуса, а в правой – первая, т.е. степень понизилась. Но будьте внимательны: степень понижается, а аргумент удваивается.

Например, $\cos^2 23° = \frac{\cos 46° + 1}{2}$.

Пример. Известно, что $\cos\alpha = 0{,}4, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}4}{2} = 0{,}3$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,3}$.

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2} = \frac{0,4+1}{2} = 0,75 =$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0,75} = \pm 0,5\sqrt{3}$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos\frac{\alpha}{2} = -0,5\sqrt{3}$.

3) Так как тангенс это отношение синуса на косинус, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0,3}}{-0,5\sqrt{3}} = -2\sqrt{0,1}$.

- Выведем формулу для тангенса половинного аргумента. Для этого разделим левую часть формулы (1) на левую часть формулы (2) и правую часть формулы (1) на правую часть формулы (2).

$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$ сократим на 2 , и учитывая, что $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получим:

$\boldsymbol{tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}}$ **формула тангенса половинного аргумента (3).**

Так как котангенс это число, взаимообратное тангенсу, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\boldsymbol{tg^2\frac{\alpha}{2}}} = \boldsymbol{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

Пример. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = -0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (3) находим $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1} = \frac{1+0.6}{-0,6+1} = \frac{1,6}{0,4} = 4$, а $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm 2$.

Найдём положение угла $\frac{\alpha}{2}$.

По условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,(разделим на 2)

$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, угол $\frac{\alpha}{2}$ в первой четверти, тангенс положительный, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, а $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5$.

- Выведем формулу, по которой можно найти $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

  Для этого используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, заменив в ней x на $\frac{\alpha}{2}$.

  Получаем $\sin\alpha = \sin(2\cdot\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}$, учтём, что $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, то

  $\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$, разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

  $$\mathbf{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \textbf{(4)}$$

- Выведем формулу для $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Применим формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$

  , $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$, разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

  $$\mathbf{\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \textbf{(5)}$$

Пример. Найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

По формуле (5) $\cos\alpha = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{1-4}{1+4} = -0{,}6$.

- Если в формуле тангенса двойного угла $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ представить $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$, то получим ещё одну формулу, по которой тангенс угла α можно найти через тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$: **tgα=**$\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{1}-\mathbf{tg}^{\mathbf{2}}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}$

С помощью доказанных на этом уроке формул можно не только вычислять значения выражений, но и упрощать выражения, доказывать тождества и решать тригонометрических уравнений.

Пример. Доказать тождество $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Представим $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, а $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, преобразуем левую часть тождества

$\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$, но $1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, то

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Левая часть равна правой части, тождество доказано.