Тема урока: **Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными**

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и систем неравенств с двумя переменными;
- Изображение в координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств, систем уравнений, систем неравенств;
- Нахождение площади получившейся фигуры.

Глоссарий по теме

Уравнение вида ax + by + c = 0 **называется линейным уравнением с двумя переменными**, где a, b и c — некоторые числа (a ≠ 0 , b ≠0), a, x и y — переменные.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Историческая справка

Уравнения, а также системы уравнений имеют давнюю историю. Нам известно, что уже в Древнем Вавилоне и Индии повседневные задачи, связанные с земляными работами или планированием военных расходов, а также астрономическими наблюдениями решались с помощью уравнений и их систем.

В то время еще не существовало привычного нам формального языка математики. Вавилоняне, также, как и индусы не использовали в своих трактатах привычные нам «икс» и «игрек». Не обозначали степень надстрочными индексами. И т.д. Их уравнения записаны в виде текстовых задач. Также, как и решения, не похожи на современные, а скорее напоминают цепочку логических рассуждений.

Вместе с тем, если перевести в привычный нам вид те уравнения, которые умели решать в Древнем Вавилоне, то мы увидим: $x^2 + x = \frac{3}{4}$; $x^2 - x = 14\frac{1}{2}$. И в древнем индийском манускрипте «Ариабхаттиам», датируемом 499 годом нашей эры, также встречаются задачи, решаемые с помощью квадратных уравнений. Индийские мудрецы (слово ученый тоже еще не существовало) уже не ограничивались решением конкретных житейских задач, но и работали над решением квадратного уравнения в общем виде.

Привычный нам вид уравнения обретают только в конце шестнадцатого века, благодаря трудам Франсу Виета (1540 – 1603 гг.). Именно он, помимо прочих своих научных достижений обладает и неофициальным титулом «создатель алгебры». Поскольку разработал и активно внедрял символический язык алгебры – те самые, привычные нам «иксы и игреки».

Актуализация знаний

1.Найдите уравнения, которые являются линейными.

$4x + 5y = 10$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = -5$; $\frac{2}{x}+\frac{3}{y} = -5$; $\frac{x}{y} = 2$; $x^2 - y = 4$; $y = 7x + 4$

Ответ: $4x + 5y = 10$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = -5$; $y = 7x + 4$

Сегодня на уроке мы вспомним что такое линейные уравнения и неравенства с двумя переменными; системы линейный уравнений и неравенств, а также научимся изображать множество на плоскости, задаваемое линейным уравнением и неравенством.

1. Линейные уравнения с двумя переменными.

Уравнение вида $ax + by + c = 0$, где a,b,c – некоторые числа, называется линейным уравнением с двумя переменными x и y.

Решением уравнения $ax + by + c = 0$, где a,b,c – некоторые числа, называется пара значений обращающая уравнение в верное числовое равенство.

Если одновременно $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax + by + c = 0$ является уравнением некоторой прямой. Для построения прямой достаточно найти две точки этой прямой.

Пример

Построить график уравнения $2x+y = 1$

$y = -2x + 1$

Если x=0, то y=1;

Если x=2, то y=-3.

На координатной плоскости отметим точки с координатами (0;1) и (2;-3). Через две точки на плоскости проведем прямую. Полученная прямая является геометрической моделью уравнения $2x+y = 1$.

1. Линейные неравенства с двумя переменными.

Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by + c < 0$ или $ax + by + c > 0$, где x и y – переменные, a, b, c – некоторые числа.

Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное равенство.

Является ли пара (2;1) решением неравенства $5x + 2y > 4$. Является, тк при подстановке в него вместо x числа 2, а вместо y числа 1 получается верное равенство $10 + 2 > 4$.

Если каждое решение неравенства с двумя переменными изобразить точкой в координатной плоскости, то получится график этого неравенства. Он является некоторой фигурой.

Пример

Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3x - 2y + 6 > 0$.

1. Уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ является уравнением прямой, проходящей через точки$(-2; 0)$ и $(0; 3)$.
2. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит в заштрихованной полуплоскости (ниже прямой $3x - 2y + 6 = 0$, а $M_2(x_1, y_2)$лежит на прямой $3x - 2y + 6 = 0$. Тогда $2y_2 - 3x_1 - 6 = 0$, а $2y_1 - 3x_1 - 6 < 0$, т.к. $y_1 < y_2$

Изобразим множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3x - 2y + 6 > 0$ штриховкой (рис. 1)

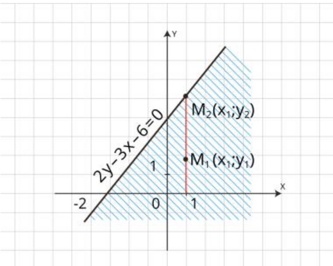

Рисунок 1 – решение неравенства $3x - 2y + 6 > 0$

Если в линейном неравенстве с двумя переменными знак неравенства заменить знаком равенства, то получится линейное уравнение $ax + by + c = 0$, графиком которого является прямая при условии, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Одна из них является графиком неравенства $ax + by + c < 0$, а другая – графиком неравенства $ax + by + c > 0$

Чтобы решить неравенство $ax + by + c < 0$ или $ax + by + c > 0$, достаточно взять какую-нибудь точку $M_1(x_1; y_1)$, не лежащую на прямой $ax + by + c = 0$, и определить знак числа $ax_1 + by_1 + c$.

Пример

Изобразите в координатной плоскости множества решений неравенства $2x + 3y < 6$

Начертим график уравнения $2x + 3y = 6$.

Пара $(0;0)$ является решением неравенства $2x + 3y < 6$, и принадлежит нижней полуплоскости, значит графиком неравенства $2x + 3y < 6$ является нижняя полуплоскость (рис. 2).

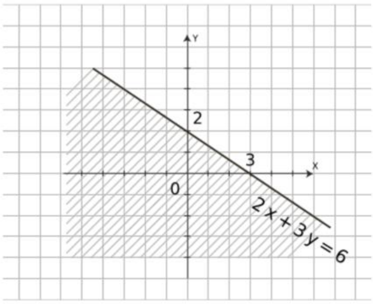

Рисунок 2 – решение неравенства $2x + 3y < 6$

1. Система линейных уравнений с двумя переменными.

Система вида $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$, где a,b,c,d,e,f – некоторые числа, называется линейной системой с двумя переменными x и y.

Пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство называют решением системы.

Решить систему – значит найти множество ее решений.

Пример

Решите систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

Каждое решение уравнения с двумя переменными представляет координаты некоторой его точки его графика. Каждое решение системы есть координаты общих точек графиков уравнений системы. Построим графики этих уравнений и найдем координаты точки пересечения (рис.3).

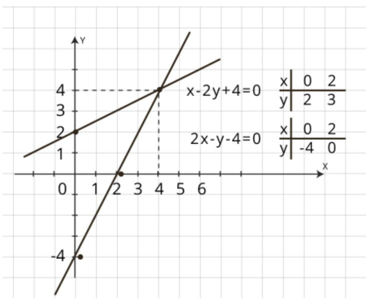

Рисунок 3 – решение системы $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

Система имеет единственное решение: x = 4 ,   y = 4 .

1. Система линейных неравенств с двумя переменными.

Системой линейных неравенств с двумя переменными называется такая система неравенств, которая в своем составе имеет два и более линейных неравенств с двумя переменными.

$\begin{cases} x - y > 2 \\ x + 3y > 6 \end{cases}$ им систему линейных неравенств с двумя переменными на примере:

1. Построим прямые $x – y = 2$ и $x + 3y = 6$
2. Пара (4;1) является решением как первого, так и второго неравенства, те является общим решением неравенств системы. Такую пару чисел называют решением системы неравенств с двумя переменными. Множество общих решений неравенств есть множество решений системы (пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему).

Множество решение системы изображается двойной штриховкой. (плоской угол) (рис. 4).

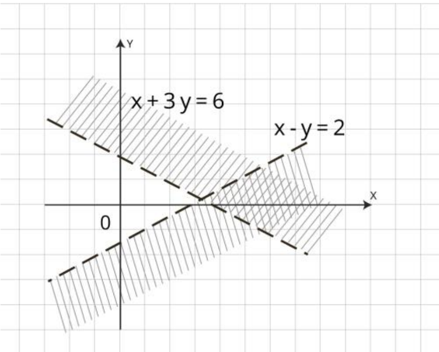

Рисунок 4 – решение системы $\begin{cases} x - y > 2 \\ x + 3y > 6 \end{cases}$

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1

Изобразите в координатной плоскости множества решений неравенства $3x – 2y + 6 \leq 0$.

1. Начертим график уравнения $3x – 2y + 6 = 0$
2. Отметим в какой-нибудь полуплоскости, например, точку (1;2).

Пара (1;2) не является решением неравенства $3x - 2y + 6 \leq 0$ и принадлежит нижней полуплоскости, значит графиком неравенства $3x - 2y + 6 \leq 0$ является верхняя полуплоскость вместе с прямой $3x – 2y + 6 = 0$. 9 (рис. 5)

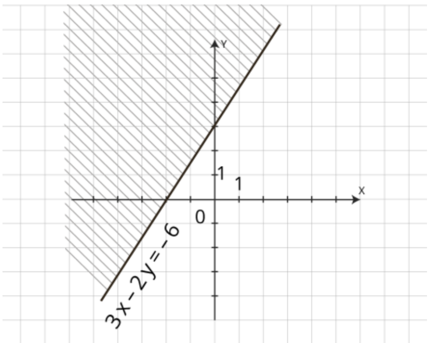

Рисунок 5 – решение неравенства $3x - 2y + 6 \leq 0$

Пример 2

Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 4x - 5y \leq 20 \end{cases}$$

Построим прямые x + y = 3 и 4x – 5y = 20.

Множество решений первого неравенства показано горизонтальной штриховкой, а множество решений второго неравенства – вертикальной штриховкой. Двойная штриховка – множество решений системы. Система задает плоский угол (рис. 6)

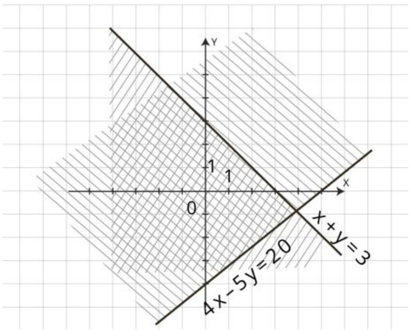

Рисунок 6 – решение системы $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 4x - 5y \leq 20 \end{cases}$

Если к системе добавить еще одно неравенство

$5x + y \geq -5$, то получится система трех неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 4x - 5y \leq 20 \\ 5x + y \geq -5 \end{cases}$$

Этой системой задается треугольник (рис. 7)

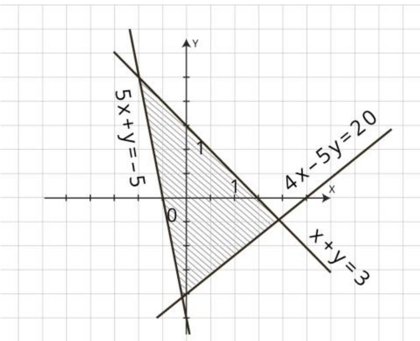

Рисунок 7 – решение системы $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 4x - 5y \leq 20 \\ 5x + y \geq -5 \end{cases}$

Точка О принадлежит M_2, левая часть неравенства положительна, и поэтому множество его решений – объединение множеств M_1 и M_2.

Домашнее задание : 1.Составить конспект.
2.выполнить задание.

*1.*Решить неравенство *2x+3y>0.*

2.Изобразите множество решений системы неравенств:

1. $\begin{cases} y - x > -2 \\ x \geqslant 0 \\ 2x + 3y < 7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ y - 2x \geqslant 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 7 \leqslant 9 \\ x - 4 > 2. \end{cases}$

Выполненные задания отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru