Тема урока: Показательные неравенства.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- простейшие показательные неравенства;
- решение показательных неравенств замена переменной, разложение на множители;
- метод рационализации при решении показательных неравенств;
- метод интервалов при решении показательных неравенств;
- графический метод решения показательных неравенств.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Рассмотрим показательные неравенства.

Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней, при постоянном основании.

Неравенства вида $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ называются **простейшими показательными неравенствами**.

В самом простом случае неравенство принимает вид: $a^x > b$. Очевидно, что знак неравенства может быть любым (<, >, $\leq$, $\geq$).

Множество решения неравенства будет зависеть и от знака неравенства, и от основания степени, и от значения b.

Так как множество значений показательной функции $f(x) = a^x$ – множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ неравенства: $a^x < b$ и $a^x \leq b$ решений не имеют, независимо от значения основания *a*. В то же время множеством решения неравенств $a^x > b$ и $a^x \geq b$ является все множество действительных чисел, независимо от значения основания *a* (см. Рисунок 1).

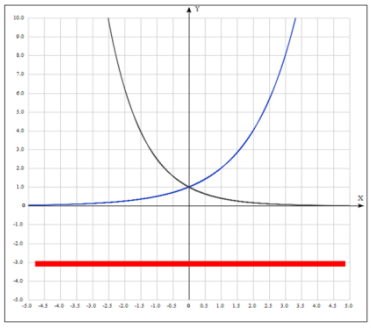

Рисунок 1 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства при b<0

Теперь рассмотрим случай b>0, *a*>1.

В том случае, когда основание степени a>1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства не изменяется (см. Рисунки 2 и 3).

Рисунок 2 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x < b$ или $a^x \leq b$ при b>0, *a*>1.

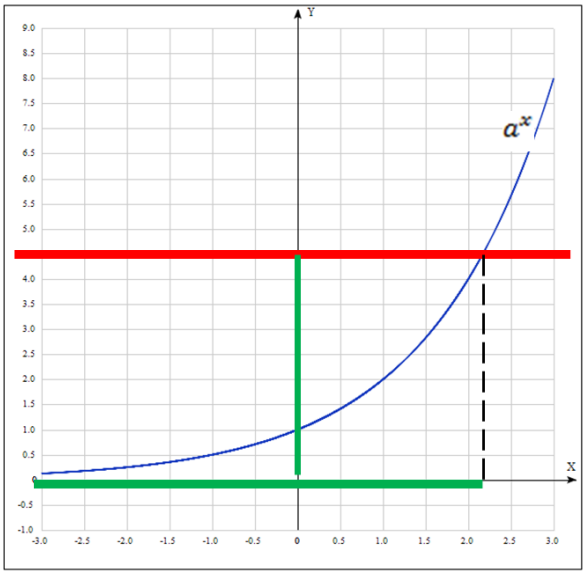

Рисунок 3 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x > b$ или $a^x \geq b$ при b>0, *a*>1.

Теперь рассмотрим случай b>0, 0<a<1.

В том случае, когда основание степени 0<a<1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства изменяется на противоположный (см. Рисунки 4 и 5).

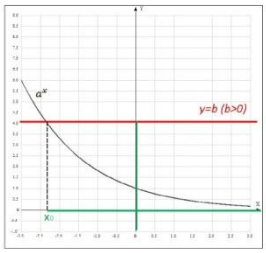

Рисунок 4 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x < b$ или $a^x \leq b$ при b>0, 0<*a*<1.

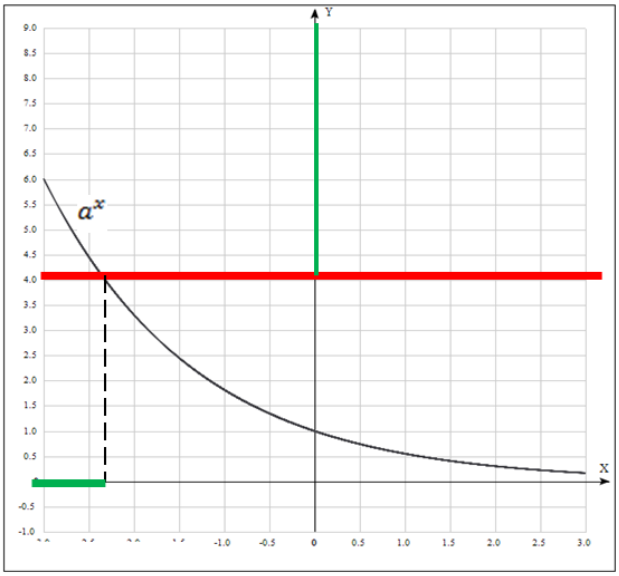

Рисунок 5 – иллюстрация решения простейшего показательного неравенства $a^x > b$ или$a^x \geq b$ при b>0, 0<*a*<1.

Для того чтобы решить простейшее показательное неравенство $a^x > b$, нужно число *b* представить в виде степени числа *a*.

Рассмотрим пример: $5^x > \sqrt[7]{125}$.

Представим $\sqrt[7]{125}$ в виде степени числа 5: $\sqrt[7]{125} = 5^{3/7}$.

Теперь перепишем данное неравенство в виде: $5^x > 5^{3/7}$.

Так как основание степени больше 1, то при переходе к показателям знак неравенства сохраняется, поэтому *x*>3/7.

Ответ: *x*>3/7.

Рассмотрим еще один пример: $(0{,}4)^{x^2-2x} \leq \frac{8}{125}$.

Перепишем его в виде

$$(\frac{2}{5})^{x^2-2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

Так как основание степени меньше 1, то при переходе к показателям знак неравенства изменяется на противоположный:

$$x^2 - 2x \geq 3,$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0,$$

$\begin{cases} x \le -1 \\ x \ge 3 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x \le -1 \\ x \ge 3 \end{cases}$.

2. Теперь перейдем к решению более сложных показательных неравенств.

2.1) Рассмотрим пример: $3^{\frac{x+1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \ge 12$.

Преобразуем показатель первого слагаемого: $3^{1+\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \ge 12$.

Теперь в левой части вынесем за скобку общий множитель: $3^{\frac{1}{x}}(3+1) \ge 12$.

Разделим обе части неравенства на 4: $3^{\frac{1}{x}} \ge 3$. Получили простейшее показательное неравенство. Так как основание степени больше 1, то при переходе к показателям знак неравенства сохраняется, получаем: $\frac{1}{x} \ge 1$. Решение этого неравенства является полуинтервал (0; 1].

Ответ: (0; 1].

2.2) Рассмотрим еще один пример: $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 16 > 0$.

Заметим, что $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, поэтому введем новую переменную $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Получим вспомогательное неравенство: $t^2 - 10t + 16 > 0$.

Решим его:

$\begin{cases} t > 8 \\ t < 2 \end{cases}$.

Вернемся к исходной переменной:

$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \end{cases}$, $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases}$.

Так как основание степени меньше 1, то при переходе к показателям знак неравенства изменится на противоположный:

$\begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases}$.

2.3) Рассмотрим еще одной показательное неравенство, которое решается методом замены переменной.

$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{3^x}{3^{2x} - 1} < \frac{1}{3^x + 1}.$$

Видим, что неравенство зависит от выражения 3^x, поэтому введем новую переменную $t = 3^x, t > 0$ и запишем вспомогательное неравенство: $\frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2-1} < \frac{1}{t+1}$.

Преобразуем полученное неравенство к виду: F(t)<0.

$\frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{t+1} < 0$, приведем левую часть к общему знаменателю:

$\frac{t+1+t-t+1}{(t-1)(t+1)} < 0$, $\frac{t+2}{(t-1)(t+1)} < 0$. Так как $t > 0$, то $t + 2 > 0$ и $t + 1 > 0$, поэтому решение полученного неравенства сводится к: $t - 1 < 0$, то есть $t < 1$.

Вернемся к исходной переменной: $3^x < 1$, то есть x<0.

Ответ: $(-\infty; 0)$

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

1. $\sqrt{25 - 5^x} > 5 - 5^x$.

Решение:

Введем новую переменную $t = 5^x$.

Запишем вспомогательное неравенство: $\sqrt{25 - t} > 5 - t$.

1) Если $5 - t < 0$, то решением неравенства является любое значение t, которое удовлетворяет области определения: $25 - t \geq 0$.

Решив систему: $\begin{cases} 5 - t < 0 \\ 25 - t \geq 0 \end{cases}$, получаем: $5 < t \leq 25$.

2) Если $5 - t \geq 0$ ($t \leq 5$), возведем обе части неравенства в квадрат:

$25 - t > (5 - t)^2$.

Решим его: $25 - t > 25 - 10t + t^2$,

$t^2 - 9t < 0$,

$t(t-9) < 0$,

0<t<9.

Учитывая условие $t \leq 5$, получаем: $0 < t \leq 5$.

Таким образом, объединяя первый и второй случай, получаем решение иррационального вспомогательного неравенства:

$0 < t \leq 25$.

Вернемся к исходной переменной:

$0 < 5^x \leq 25$. Так как $5^x > 0$ всегда, то получаем: $5^x \leq 25$.

Учитывая, что основание степени больше 1, получаем:

$x \leq 2$

Ответ: $(-\infty; 2]$.

Домашнее задание: 1.Составить конспект

2.Выполнить задания:№168,169.(стр.299)

Учебник: http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html

Выполненные задания отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru