

ТЕМА УРОКА: «Возрастание и убывание функции. Экстремумы».

ЦЕЛЬ: дать понятие монотонности промежутков возрастания и убывания, экстремумов функции.

Теоретический материал для самостоятельного изучения.

1. Монотонность функции.

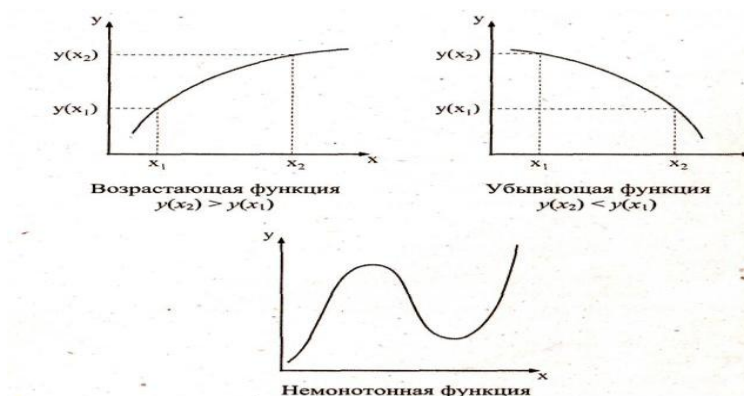
Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (то есть возрастание и убывание). **Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции**

$$(если\ x_2 > x_1, то\ f(x_2) > f(x_1))$$

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции

$$(если\ x_2 > x_1, то\ f(x_2) < f(x_1))$$

(чертеж графиков функций монотонно возрастающей и убывающей)



Пример 1. Определить монотонность функции: $y(x) = -2x + 4$. Область определения этой функции – все действительные числа. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значение функции в этих точках: $y(x_1) = -2x_1 + 4$ и $y(x_2) = -2x_2 + 4$. Сравним эти значения и определим, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $y(x_2) - y(x_1) = (-2x_2 + 4) - (-2x_1 + 4) =$

$$= -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 - x_1)$$

Данная функция является убывающей (чертеж графика на доске).

Функция по всей области определения может быть немонотонна, но на отдельных промежутках функция может быть монотонной. Например. Функция $y = -x^3 + 6x - 8$ в целом не монотонна, но на промежутке $(3; \infty)$ функция убывает, а на промежутке $(-\infty; 3)$ – возрастает. Соответственно такие промежутки называются промежутками возрастания и убывания.

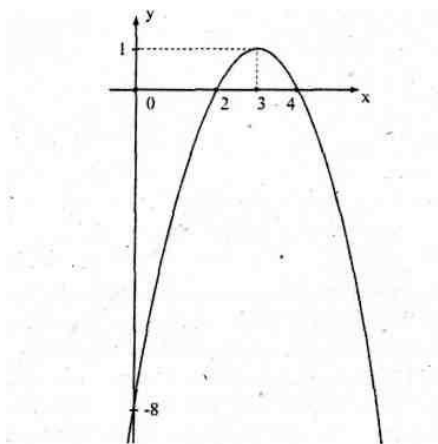
Пример 2. Область определения функции $y = -x^2 + 6x - 8$ является

$D(y) = (-\infty; \infty)$. Возьмем два значения x из области определения x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 8$ и $y(x_2) = -x_2^2 + 6x_2 - 8$. Сравним эти значения. Рассмотрим разность этих величин $Y(x_2) - Y(x_1) = -x_2^2 + x_1^2 + 6x_2 - 6x_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 6(x_2 - x_1) =$

$= (x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1)$. Первый множитель в этом произведении положительный, так как $x_2 > x_1$ по договоренности. Второй же множитель может иметь разный знак. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x_1 < x_2 \leq 3$, Тогда $x_1 + x_2 < 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 > 0$. Поэтому произведение положительно и $y(x_2) - y(x_1) > 0$, то есть

$y(x_2) > y(x_1)$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$. б) Пусть $x_2 > x_1 \geq 3$, тогда $x_1 + x_2 > 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 < 0$. Поэтому произведение отрицательно и $y(x_2) - y(x_1) < 0$, то есть $y(x_2) < y(x_1)$. Следовательно, функция $y(x)$ убывает на промежутке $[3; \infty)$.



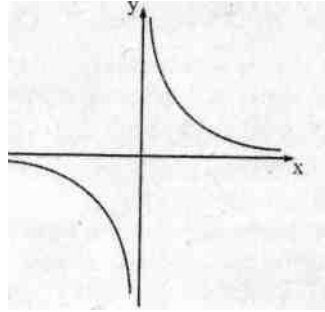
Из данного графика видны промежутки возрастания и убывания.

Если область определения функции состоит из нескольких промежутков, то при исследовании функции на монотонность надо выбирать точки x_1 и x_2 , лежащие в одном промежутке.

Пример 3

Исследуем на монотонность функцию $y = \frac{1}{x}$

Область определения данной функции - промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. График этой функции (гипербола) хорошо известен.



Видно, что функция убывает в области определения. Исследуем ее на

монотонность. Выберем точки x_1 и x_2 из области определения, так что

$x_2 > x_1$. Найдем разность $y(x_2) - y(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то числитель этой дроби отрицательный. Если x_1 и x_2 лежат в одном промежутке области определения (то есть $x_1, x_2 < 0$ или $x_1, x_2 > 0$, то произведение $x_1 \cdot x_2 > 0$. Поэтому дробь отрицательна, то есть $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. В итоге получаем правильный результат - функция является убывающей.

Если x_1 и x_2 лежат в разных промежутках области определения (то есть $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$), то произведение $x_1 x_2 < 0$. Поэтому дробь положительна, то есть $y(x_2) - y(x_1) > 0$ или $y(x_2) > y(x_1)$. В результате получаем грубую ошибку - функция является возрастающей.

Пример 4

Докажем, что функция $y = \cos x$ убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$.

Понятно, что в силу периодичности косинуса достаточно доказать утверждение для промежутка $[0; \pi]$. Используя определение убывающей функции и формулу разности косинусов, получим:

$$y(x_2) - y(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2}. \text{ Определим}$$

знак этого выражения, найдя знак каждого множителя. Из неравенства $0 \leq x_1 <$

$$x_2 \leq \pi \text{ можно получить: } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

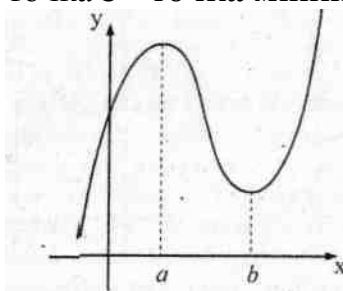
Поэтому $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ и $\sin \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Следовательно, данное произведение отрицательно, то есть $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. Таким образом, на указанных промежутках функция $y = \cos x$ убывает.

2. Экстремумы функций

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки $x = a$ удобно пользоваться понятием окрестности этой точки. **Окрестностью точки a называют любой интервал, содержащий эту точку.**

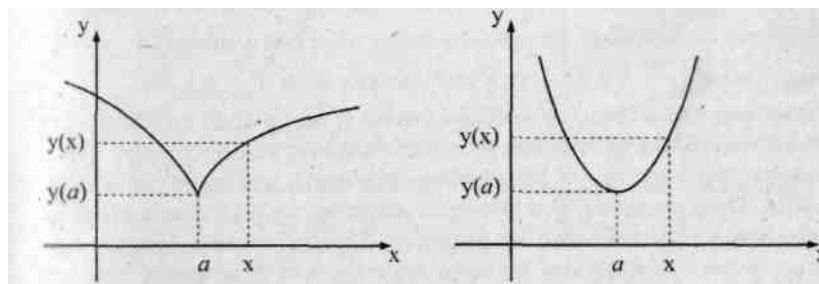
Например, интервалы $(3; 10)$, $(4; 6)$, $(4,8; 5,1)$ - некоторые окрестности точки $a = 5$.

Характерным свойством функции $y(x)$ являются **точки экстремума** - точки, в которых **меняется монотонность** функции. При этом, если **возрастание** функции **сменяется** ее **убыванием**, то такая точка a - **точка максимума**. Если, наоборот, **убывание** функции **сменяется** ее **возрастанием**, то такая точка b - **точка минимума**. Дадим более точное



определение точек экстремума.

Точка $x = a$ называется точкой минимума функции $y(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $y(x) \geq y(a)$. При этом значение $y(a)$ называется минимумом функции $y(x)$.



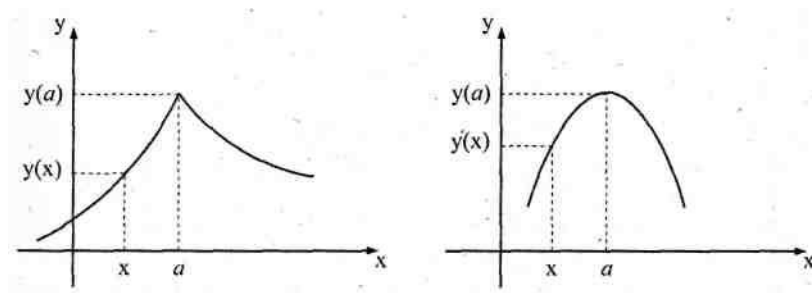
В простейших случаях легко найти точку минимума и минимум функции.

Пример 6. Для функции $y = x^2 + 6x + 10$ выделим полный квадрат суммы:

$y = x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = 1 + (x + 3)^2$. Так как при всех значениях x величина $(x + 3)^2 > 0$, то данная функция имеет минимум $y_{\min} = 1$ при условии

$x + 3 = 0$, то есть в точке минимума $x_{\min} = -3$.

Точка $x = a$ называется точкой максимума функции $y(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $y(x) < y(a)$. При этом значение $y(a)$ называется максимумом функции $y(x)$.



Домашнее задание: П.5. № 77 , 78 (стр.46)

Учебник: <http://uchebniki.net/algebra10/392-uchebnik-algebra-10-11-klass-kolmogorov-2008.html>

Выполненные задания отправить на электронную почту

Lelya.Stepanova.66@inbox.ru