Тема урока: Решение целых и дробно-рациональных неравенств

Понятие рациональных неравенств

Определение 1

Рациональное неравенство представляет из себя такое неравенство с переменными, которое содержит в обоих частях рациональные выражения.

Отметим, что определение никак не затрагивает вопрос количества переменных, значит, их может быть сколь угодно много. Следовательно, возможны рациональные неравенства с $1, 2, 3$и более переменными. Чаще всего приходится иметь дело с выражениями, содержащими всего одну переменную, реже две.

Все рациональные неравенства делятся на целые и дробные.

Определение 2

Целое рациональное неравенство состоит из целых рациональных выражений (в обеих частях).

Определение 3

Дробно-рациональное неравенство – это такое неравенство, которое содержит дробное выражение в одной или обеих своих частях.

.

Как решать целые неравенства

Допустим, что нам требуется найти решения целого рационального неравенства $r(x)<s(x)$, которое включает в себя только одну переменную x. При этом $r(x)$ и $s(x)$ представляют собой любые целые рациональные числа или выражения, а знак неравенства может отличаться. Чтобы решить это задание, нам нужно преобразовать его и получить равносильное равенство.

Начнем с перенесения выражения из правой части в левую. Получим следующее:

вида $r(x)-s(x) <0\ (\le, >, \ge)$

Мы знаем, что $r(x)-s(x)$ будет целым значением, а любое целое выражение допустимо преобразовать в многочлен.
Преобразуем $r(x)-s(x)$ в $h(x)$. Это выражение будет тождественно равным многочленом. Учитывая, что у $r(x)-s(x)$ и $h(x)$ область допустимых значений x одинакова, мы можем перейти к

неравенствам $h(x) < 0$ $(\le,>,\ge)$h(x) <0 (≤,>, ≥), которое будет равносильно исходному.

Зачастую такого простого преобразования будет достаточно для решения неравенства, поскольку в итоге может получиться линейное или квадратное неравенство, значение которого вычислить несложно.

Как решать дробно рациональные неравенства

Допустим, надо решить дробно рационально неравенств вида $r(x)<s(x)$ $(\le,>,\ge)$ где $r(x)$r(x) и $s(x)$s(x) являются рациональными выражениями, x – переменной. Хотя бы одно из указанных выражений будет дробным. Алгоритм решения в этом случае будет таким:

1. Определяем область допустимых значений переменной xx.
2. Переносим выражение из правой части неравенства налево, а получившееся выражение $r(x)-s(x)$ представляем в виде дроби. При этом где $p(x)$p(x) и $q(x)$q(x) будут целыми выражениями, которые являются произведениями линейных двучленов, неразложимых квадратных трехчленов, а также степеней с натуральным показателем.
3. Далее решаем полученное неравенство методом интервалов.
4. Последним шагом является исключение точек, полученных в ходе решения, из области допустимых значений переменной xx, которую мы определили в начале.

Это и есть алгоритм решения дробно рационального неравенства

.

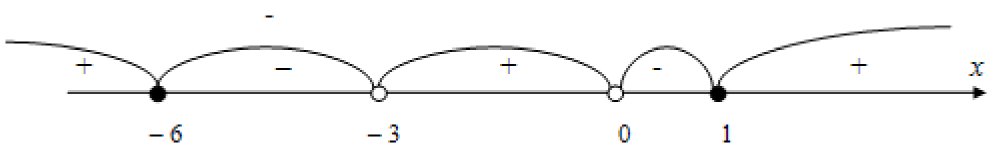
Пример Найти все целые решения, удовлетворяющие неравенству $\frac{11+x}{x+3} \le \frac{4}{x} - 1$.

Решение:

$$\frac{11+x}{x+3} \le \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{11+x}{x+3} - \frac{4}{x} + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{11x + x^2 - 4x - 12 + x^2 + 3x}{x\cdot(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 10x - 12}{x\cdot(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2 + 5x - 6\right)}{x\cdot(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(x+6)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+3)} \le 0$$

Методом интервалов:



Решение неравенства: $x \in [-6; -3) \cup (0; 1]$.

Целые числа, принадлежащие полученным полуинтервалам: – 6; – 5; – 4; 1.

Ответ: – 6; – 5; – 4; 1.

Домашнее задание: 1.Составить конспект

2. Выполнить задание в тетради.

1. Решите неравенство $\frac{x-2}{x}<0$.
2. Решите неравенство $\frac{1}{x}>\frac{2}{3}$.
3. Определите число целых решений неравенства $\frac{3x+3}{2-x}\geq 0$.
4. Определите число целых решений неравенства $\frac{8-x}{7x-14}\geq 0$.
5. Решите неравенство $\frac{2x-3}{x+1}<0$.
6. Решите неравенство $2^x<16$.
7. Решите неравенство $\frac{4}{x}<\frac{1}{4}$.
8. Решите неравенство $\frac{4}{x+3}>\frac{1}{5}$.
9. Решите неравенство $3+\frac{4}{x+2}>\frac{3}{x}$.

Домашнее задание :Выполнить письменно в тетрадь.

Выполненные задания отправить на электронную почту
Lelya.Stepanova.66@inbox.ru