Тема урока**: Функция. Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами.**

Цели урока:

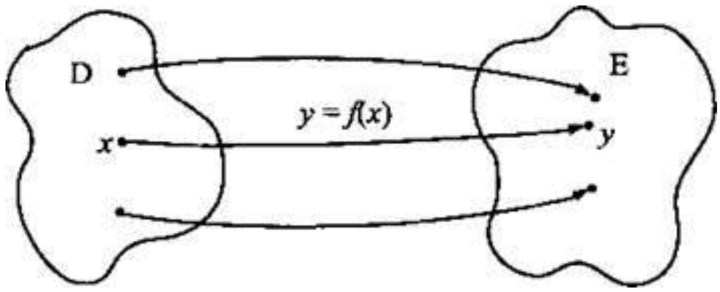
- повторить определение функции, графика функции;

- учить находить область определения и область значений функции.

<u>Изучить теоретический материал самостоятельно и написать важную для вас информацию в тетрадь.</u>

1. Понятие функции

Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f по которому каждому числу x ∈ D ставится в соответствие единственное число y ∈ E (см. рис.). Тогда говорят, что задана функция y = f(x) с областью определения (О.О.) D и областью значений (О.З.) E. При этом величину **x** называют **независимой переменной** (или **аргументом функции**), величину **y** - **зависимой переменной** (или **значением функции**).



Область определения функции y = f(x) обозначают D(f), область значений E(f).

Другими словами, функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x-2}+3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: от величины x вычесть число 2 (x - 2), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$¿ и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). Совокупность этих операций (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и называется функцией y(x). Например, для x = 6 находим $y(6)=\sqrt{6-2}+3=\sqrt{4}+3=2+3=5$. То есть для вычисления функции y в данной точке x необходимо подставить эту величину x в данную функцию y(x).

Очевидно, что для данной функции для любого допустимого числа x можно найти только одно значение y (т. е. каждому значению x соответствует одно значение y).

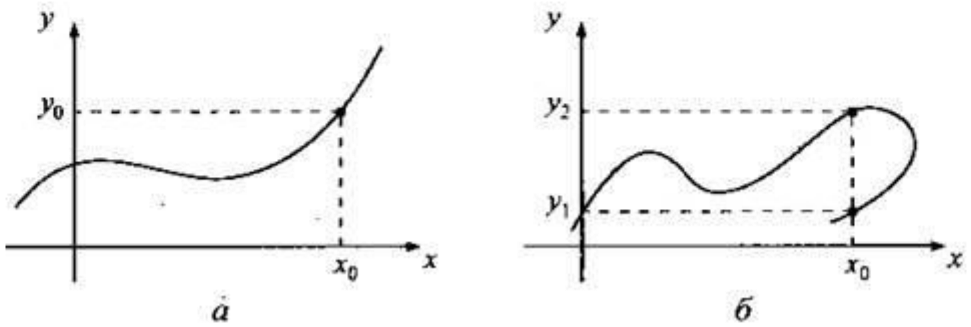
Рассмотрим теперь область определения и область значений этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения (x - 2) можно только, если эта величина неотрицательная, т. е. x - 2 ≥ 0, или x ≥ 2. Поэтому область определения (О.О.) функции D(y) = [2; +∞). Так как по определению арифметического корня $0 \le \sqrt{x-2} < +\infty$, то прибавив ко всем частям этого неравенства число 3, получим $3 \le \sqrt{x-2} + 3 < +\infty$, или 3 ≤ y < +∞. Поэтому область значений (О.З.) функции E(y) = [3; +∞).

Пример 2

Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x-3, \\ x^2+1 \end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для x = 1, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x (x = 1) соответствуют два значения y (y = -1 и y = 2). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 3

Приведены графики двух зависимостей y(x). Определить, какая из них является функцией.



На рис. а приведён график функции, т. к. любой точке x_0 соответствует только одно значение y. На рис. б приведён график какой-то зависимости (но не функции), т. к. существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, значения y_1 и y2).

2. Способы задания функций

1) Аналитический (с помощью формулы или формул)

Пример 4

Рассмотрим функции:

а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$;

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$

Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задаёт функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x=-0,37$. Так как x < 0, то, пользуясь верхним выражением, получаем: $y(-0,37)=-0,37$. Для $x=\frac{2}{3}$ (т. к. x > 0, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x+y=2y-x^2$.

Выразим из этого соотношения величину y: $3x+x^2=2y-y$, или $x^2+3x=y$. Таким образом, это соотношение также задаёт функцию $y=x^2+3x$

2) Табличный

Пример 5

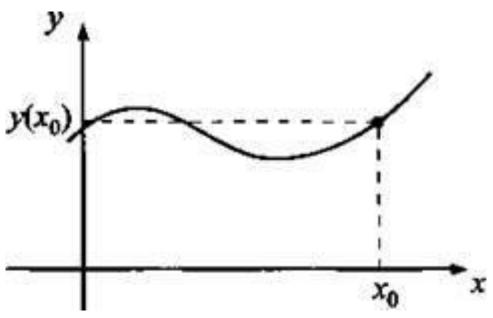
Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задаёт функцию: для каждого (приведённого в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, y(1,5) = 2,25, y(5) = 25 и т. д.

3) Графический

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости y(x) удобно пользоваться специальным рисунком - графиком функции.



Графиком функции y(x) называют множество всех точек системы координат, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x, а ординаты - соответствующим значениям зависимой переменной y.

В силу такого определения все пары точек (x0, y0), которые удовлетворяют функциональной зависимости y(x), расположены на графике функции. Любые другие пары точек, не удовлетворяющие зависимости y(x), на графике функции не лежат.

Пример 6

Дана функция $y=2x-3\vee x\vee+4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) (-2; -6); б) (-3; -10)?

а) Найдём значение функции y при x = -2: y(-2) = 2 · (-2) - 3|-2| + 4 = -4 – 3 · 2 + 4 = -6. Так как y(-2) = -6, то точка A(-2; -6) принадлежит графику данной функции.

б) Определим значение функции y при x = -3: y(-3) = 2 · (-3) - 3|-3| + 4 = -6 – 3 · 3 + 4 = -11. Так как y(-3) = -11, то точка B(-3; -10) не принадлежит графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. Наиболее полным следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем табличный способ позволяет быстро и легко найти значение функции для некоторых значений аргумента. График функции наглядно показывает её поведение. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

В дальнейшем будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим ещё несколько задач.

Пример 7

Дана функция y = 2x2 – 3x + 1. Найти: а) y(2); б) y(-3x); в) y(x + 1).

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2)=2\cdot 2^2-3\cdot 2+1=8-6+1=2+1=3$;

б) $y(-3x)=2\cdot(-3\cdot x)^2-3\cdot(-3\cdot x)+1=18\cdot x^2+9\cdot x+1=18x^2+9x+1$.

в) $y(x+1)=2\cdot(x+1)^2-3\cdot(x+1)+1=2\cdot(x^2+2\cdot x+1)-3\cdot x-3+1=2\cdot x^2+x=2x^2+x$.

Пример 8

Известно, что $y(3-x)=2x^2-4$. Найти: а) y(x); б) y(-2).

а) Обозначим буквой $z=3-x$, тогда $x=3-z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3-x)=2x^2-4$ и получим: $y(3-(3-z))^2-4$,
или $y(z)=2\cdot(3-z)^2-4$, или $y(z)=2\cdot(9-6z+z^2)-4$, или $y(z)=2z^2-12z+14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции: z, x, t или любой другой, то сразу получаем: $y(x)=2x^2-12x+14$.

б) Теперь легко найти $y(-2)=2\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+14=8+24+14=46$.

<u>**Домашнее задание: Решить в тетради.**</u>

Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{3-x}{|x|-5}$;

б) $y=\frac{6x^2-3x+1}{|x-2|-1}$;

в) $y=\frac{3-x}{2-\frac{x}{x+5}}$;

г) $y=\frac{7x^2-14}{3-\frac{|x|}{x+2}}$;

д) $y=\frac{5x^2-3x-2}{7-\frac{|x-3|}{x+3}}$;

е) $y=\frac{\sqrt{3-|x+1|}}{x+2}$;

ж) $y=\frac{\sqrt{|5x+2|-3}}{(x+2)\cdot(x-1)}$;

з) $y=\frac{\sqrt{|x+1|-2}}{\sqrt{5-|x-1|}}$.

Ответы: а) $x\neq -5$; б) $x\neq 1\, u\, x\neq 3$; в) $x\neq -5\, u\, x\neq -10$; г) $x\neq -2\, u\, x\neq -1{,}5$; д) $x\neq -3\, u\, x\neq -\frac{9}{4}$; е) $-4\leq x\leq 2\, u\, x\neq -2$; ж) $x\leq -1\,(x\neq -2)\, u\, x\geq \frac{1}{5}\,(x\neq 1)$; з) $x\in(-4;3]\cup[1;6)$.

Выполненные задания отправить на электронную почту Lelya.Stepanova.66@inbox.ru